❾（20 武汉 24）将抛物线 $C$：$y=(x-2)^2$ 向下平移 6 个单位长度得到抛物线 $C_1$，再将抛物线 $C_1$ 向左平移 2 个单位长度得到抛物线 $C_2$.

（1）直接写出抛物线 $C_1$、$C_2$ 的解析式；

（2）如图 1，点 $A$ 在抛物线 $C_1$（对称轴 $l$ 右侧）上，点 $B$ 在对称轴 $l$ 上，$\triangle OAB$ 是以 $OB$ 为斜边的等腰直角三角形，求点 $A$ 的坐标；

（3）如图 2，直线 $y=kx$（$k\neq0$，$k$ 为常数）与抛物线 $C_2$ 交于 $E$、$F$ 两点，$M$ 为线段 $EF$ 的中点；直线 $y=-\frac{4}{k}$ 与抛物线 $C_2$ 交于 $G$、$H$ 两点，$N$ 为线段 $GH$ 的中点．求证：直线 $MN$ 经过一个定点.

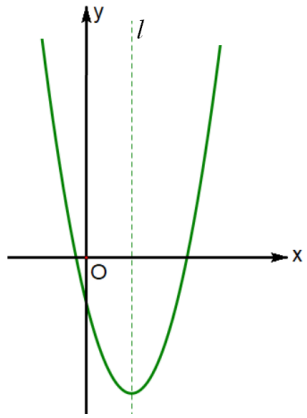



图 1

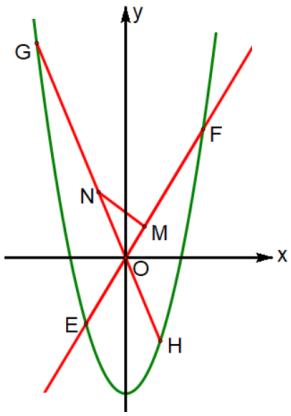



图 2

❾（1）抛物线 $C_1$：$y=(x-2)^2-6$．抛物线 $C_2$：$y=x^2-6$．

（2）按照点 $B$ 的位置分两种情况讨论：点 B 在 x 轴上方或 x 轴下方．

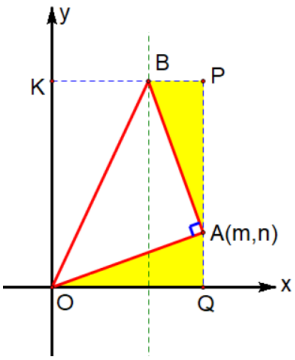
①如图 1，作等腰直角三角形 $OAB$ 的外接矩形 $OKPQ$，使得 $KP//x$ 轴．

设 $A(m, n)$．由 $KP=OQ$，得 $2+n=m$．所以 $n=m-2$，$A(m, m-2)$．

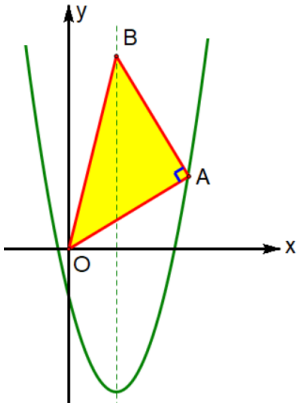
将点 $A(m, m-2)$代入 $y=(x-2)^2-6$，得 $m-2=(m-2)^2-6$．

整理，得 $m^2-5m=0$．解得 $m=5$，或 $m=0$．

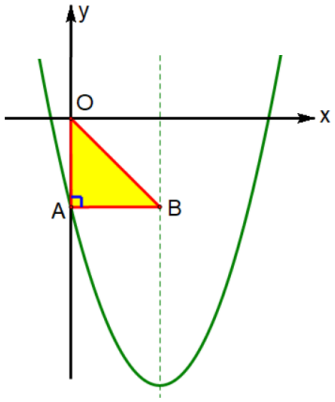
所以 $A(5, 3)$（如图 2），或$(0,-2)$（如图 3，在对称轴左侧，舍去）．




第 9 题图 1




第 9 题图 2




第 9 题图 3

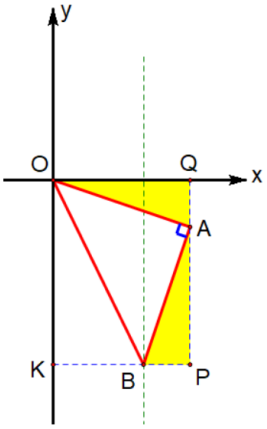
②如图 4，设 $A(m, n)$．由 $KP=OQ$，得 $2-n=m$．所以 $n=2-m$，$A(m, 2-m)$．

将点 $A(m, 2-m)$代入 $y=(x-2)^2-6$，得 $2-m=(m-2)^2-6$．

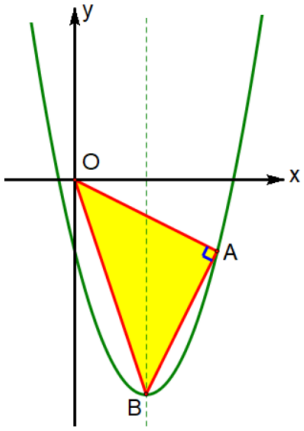
整理，得 $m^2-3m-4=0$．解得 $m=4$，或 $m=-1$．

所以 $A(4,-2)$（如图 5），或$(-1, 3)$（如图 6，在对称轴左侧，舍去）．

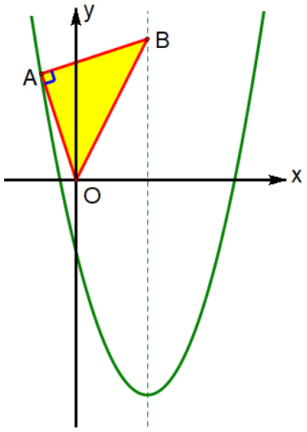
综上所述，符合条件的点 $A$ 有两个，$(5, 3)$或$(4,-2)$．




第 9 题图 4




第 9 题图 5




第 9 题图 6

（3）由 $\begin{cases} y=x^2-6, \\ y=kx, \end{cases}$ 得 $x^2-kx-6=0$. . 所以 $x_E+x_F=k$.

所以 $x_M=\dfrac{x_E+x_F}{2}=\dfrac{k}{2}$. 所以 $M(\dfrac{k}{2},\dfrac{k^2}{2})$. . 设 $-\dfrac{4}{k}=\lambda$，那么 $N(\dfrac{\lambda}{2},\dfrac{\lambda^2}{2})$.

设直线 $MN$ 的解析式为 $y=ax+b$，代入点 $M(\frac{k}{2},\frac{k^2}{2})$.、 $N(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda^2}{2})$.，得 $\begin{cases}\frac{k}{2}x+b=\frac{k^2}{2},\\ \frac{\lambda}{2}x+b=\frac{\lambda^2}{2}.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}k\lambda x+2\lambda b=k^2\lambda,\\ k\lambda x+2kb=\lambda^2 k.\end{cases}$ 两式相减，得 $(2\lambda-2k)b=k^2\lambda-k\lambda^2$ .

所以 $b=\frac{k^2\lambda-k\lambda^2}{2\lambda-2k}=\frac{k\lambda(k-\lambda)}{2(\lambda-k)}=-\frac{k\lambda}{2}=-\frac{-4}{2}=2$ . 所以直线 $MN$ 过定点$(0, 2)$.