例　　2020 年山西省中考第 23 题

如图 1，抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-x-3$ 与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C，直线 l 与抛物线交于 A、D 两点，与 y 轴交于点 E，点 D 的坐标为(4,－3).

（1）请直接写出 A、B 两点的坐标及直线 l 的函数表达式；

（2）若点 P 是抛物线上的点，点 P 的横坐标为 m（$m\geqslant 0$），过点 P 作 $PM\perp x$ 轴，垂足为 M，PM 与直线 l 交于点 N，当点 N 是线段 PM 的三等分点时，求点 P 的坐标；

（3）若点 Q 是 y 轴上的点，且 $\angle ADQ=45°$，求点 Q 的坐标.

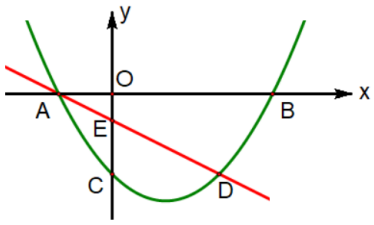


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“20 山西 23”，拖动点 P 运动，可以体验到，点 N 可以与线段 PM 的两个三等分点重合，其中一种情况点 N 与点 E 重合．点击屏幕左下方的按钮“第（3）题—1”或“第（3）题—2”，可以体验到，在 y 轴上存在两个点 Q 使得 $\angle ADQ=45°$．

思路点拨

1．点 N 是线段 PM 的三等分点，点 P 在 CD 下方的抛物线上（包括 C、D 两点）.

2．　P、N 两点的纵坐标中都含有因式 $(m+2)$，是因为抛物线与直线交于 x 轴上的点 A.

3．第（3）题中的两个点 Q 是可以准确画示意图的，两个点 Q 的计算可以互相依赖.

4．其实第（3）题只与 A、D 两点有关，与其他条件都无关.

满分解答

（1）由 $y=\frac{1}{4}x^2-x-3=\frac{1}{4}(x^2-4x-12)=\frac{1}{4}(x+2)(x-6)$，得 $A(-2,0)$，$B(6,0)$.

由 $A(-2,0)$、$D(4,-3)$，得直线 l 的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x-1=-\frac{1}{2}(x+2)$.

（2）已知 P、N 分别在抛物线和直线 l 上，所以 $P\left(m,\frac{1}{4}(m+2)(m-6)\right)$，$N\left(m,-\frac{1}{2}(m+2)\right)$.

如果 N 是线段 PM 的三等分点，那么 $NM=\frac{1}{3}PM$，或 $NM=\frac{2}{3}PM$.

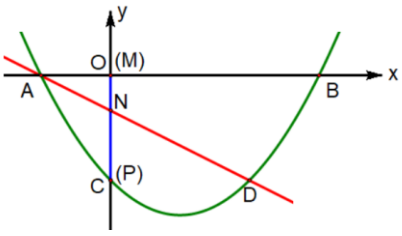


图 2

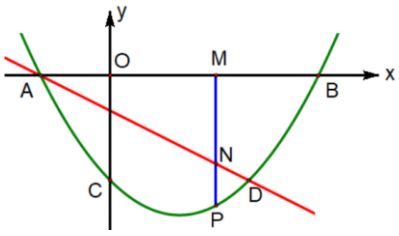


图 3

①当 $NM=\frac{1}{3}PM$ 时，$\frac{1}{2}(m+2)=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{4}(m+2)(m-6)\right]$.

解得 $m=0$，或 $m=-2$（P 与 A 重合，舍去）．此时 $P(0,-3)$（如图 2 所示）．

②当 $NM=\frac{2}{3}PM$ 时，$\frac{1}{2}(m+2)=\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{4}(m+2)(m-6)\right]$．

解得 $m=3$，或 $m=-2$（舍去）．此时 $P(3,-\frac{15}{4})$（如图 3 所示）．

（3）如图 4，因为 A、D 两点是确定的，当 $\angle ADQ=45°$ 时，在 y 轴上存在两个点 Q．设 y 轴正半轴上为点 Q，y 轴负半轴上为点 Q'，那么 $\angle QDQ'=90°$．

先求点 $Q(0, m)$．

如图 5，已知 $D(4,-3)$，$E(0,-1)$．作 $DH\perp y$ 轴于 H，那么 $H(0,-3)$．

在 y 轴上构造点 $G(0,-7)$，那么 $\triangle DGH$ 是腰长为 4 的等腰直角三角形，$\angle QGD=45°$．

由 $\angle QGD=\angle QDE$，$\angle Q$ 是公共角，得 $\triangle QGD\backsim\triangle QDE$．

所以 $\frac{QG}{QD}=\frac{QD}{QE}$．所以 $QD^2=QE\cdot QG$．所以 $4^2+(m+3)^2=(m+1)(m+7)$．

解得 $m=9$．所以点 Q 的坐标为 $(0, 9)$．

再根据点 Q 求点 Q'．

如图 6，由 $\frac{DH}{QH}=\frac{Q'H}{DH}$，得 $Q'H=\frac{DH^2}{QH}=\frac{4^2}{12}=\frac{4}{3}$．所以 $Q'(0,-\frac{13}{3})$．

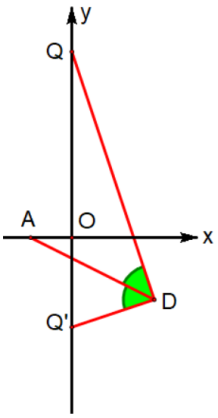


图 4

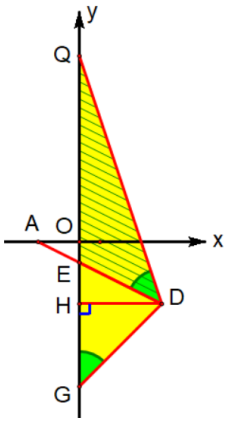


图 5

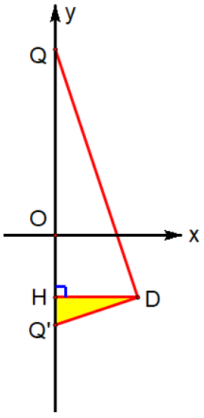


图 6

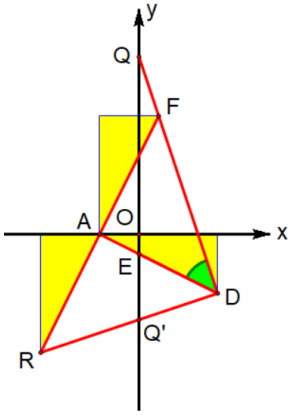


图 7

考点伸展

第（3）题的解法多种多样，但 Q、Q'两点是可以互相依赖的．我们再介绍一种处理 45° 角的方法．

如图 7，绕点 $A(-2, 0)$将点 $D(4,-3)$逆时针旋转 90° 得到点 $F(1, 6)$，那么直线 DF 与 y 轴的交点就是点 Q．

由 $D(4,-3)$、$F(1, 6)$，得直线 DF 的解析式为 $y=-3x+9$．所以 $Q(0, 9)$．

同样的，如果绕点 $A(-2, 0)$将点 $D(4,-3)$顺时针旋转 90° 得到点 $R(-5,-6)$，那么直线 DR 与 y 轴的交点就是点 Q'．

由 $D(4,-3)$、$R(-5,-6)$，得直线 DR 的解析式为 $y=\frac{1}{3}x-\frac{13}{3}$．所以 $Q'(0,-\frac{13}{3})$．