例　　2020 年淮安市中考第 27 题

如图 1，二次函数 $y=-x^2+bx+4$ 的图象与直线 l 交于 $A(-1,2)$、$B(3,n)$两点．点 P 是 x 轴上的一个动点，过点 P 作 x 轴的垂线交直线于 l 于点 M，交该二次函数的图象于点 N，设点 P 的横坐标为 m．

（1）$b=$_____，$n=$_____；

（2）若点 N 在点 M 的上方，且 $MN=3$，求 m 的值；

（3）将直线 AB 向上平移 4 个单位长度，分别与 x 轴、y 轴交于点 C、D（如图 2）．

①记△NBC 的面积为 S_1，△NAC 的面积为 S_2，是否存在 m，使得点 N 在直线 AC 的上方，且满足 $S_1-S_2=6$？若存在，求出 m 及相应的 S_1、S_2 的值；若不存在，请说明理由；

②当 $m>-1$ 时，将线段 MA 绕点 M 顺时针旋转 90°得到线段 MF，连结 FB、FC、OA，若 $\angle FBA+\angle AOD-\angle BFC=45°$，直接写出直线 OF 与该二次函数图象交点的横坐标．

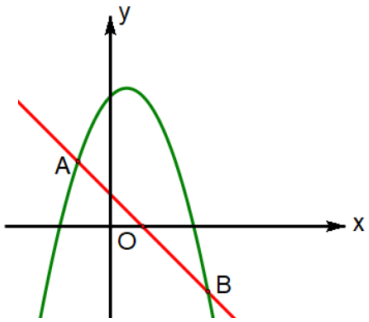


图 1

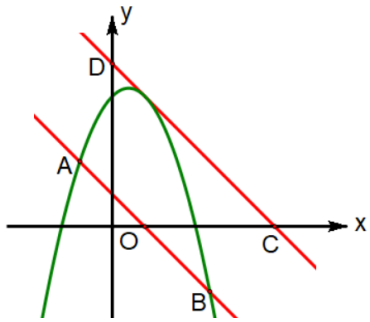


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“20 淮安 27”，拖动点 P 运动，可以体验到，有两个时刻 $NM=3$．点击屏幕左下方的按钮“第（3）①题”，拖动点 N 在 AC 上方的抛物线上运动，观察度量值，可以体验到，有一个时刻 $S_1-S_2=6$．点击屏幕左下方的按钮“第（3）②题”，拖动点 M 在射线 AB 上运动，观察度量值，可以体验到，当 $\angle1+\angle2-\angle3=45°$ 时，四边形 $AOCF$ 是平行四边形．

思路点拨

1．过点 N 平行于 y 轴的直线把△NAC 分成了共底的两部分，高的和为定值．

2．延长 CB 与 y 轴交于点 E，那么过点 N 平行于 y 轴的直线把△NEC 分成了共底的两部分，高的和为定值，而△NBC 与△NEC 的面积比为 2∶5．

3．把 $\angle FBA+\angle AOD-\angle BFC=45°$ 重新标记为 $\angle1+\angle2-\angle3=45°$，延长 CF 交直线 AB 于点 Q，可推导出 $\angle Q=\angle OAB$，于是 $AO//FQ$，四边形 $AOCF$ 是平行四边形．

满分解答

（1）$b=1$，$n=-2$．

（2）由 $A(-1,2)$、$B(3,-2)$，得直线 AB 的解析式为 $y=-x+1$．

由 $N(m,m^2+m+4)$，$M(m,-m+1)$，$MN=3$，得 $(-m^2+m+4)-(-m+1)=3$．

整理，得 $m^2-2m=0$．解得 $m=0$，或 $m=2$（如图 3 所示）．

（3）①直线 $y=-x+1$ 向上平移 4 个单位，得 $y=-x+5$．所以 $C(5,0)$，$D(0,5)$．

如图 4，延长 CB 交 y 轴于点 $E(0,-5)$，那么 $\dfrac{S_{\triangle NBC}}{S_{\triangle NEC}}=\dfrac{BC}{EC}=\dfrac{2}{5}$．

如图 4，过点 N 作 y 轴的平行线交 AC 于点 G，交 EC 于点 H.

由 $A(-1, 2)$、$C(5, 0)$，得直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$. 所以 $G(m,-\frac{1}{3}m+\frac{5}{3})$.

所以 $S_2=S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}NG(x_C-x_A)=\frac{1}{2}[(-m^2+m+4)-(-\frac{1}{3}m+\frac{5}{3})]\times 6=-3m^2+4m+7$.

而 $S_1=\frac{2}{5}S_{\triangle NEC}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}NH\cdot x_C=NH=(-m^2+m+4)-(-m+5)=-m^2+9$，

如果 $S_1-S_2=6$，那么 $(-m^2+9)-(-3m^2+4m+7)=6$. 整理，得 $(m-1)^2=3$.

解得 $m=1-\sqrt{3}$（如图 5 所示），或 $m=1+\sqrt{3}$（这个点在 AC 的下方，舍去）.

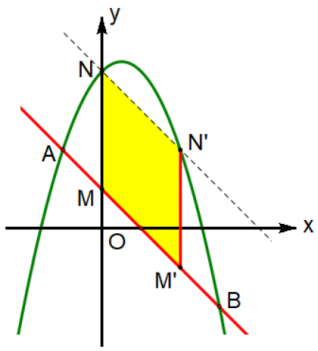


图 3

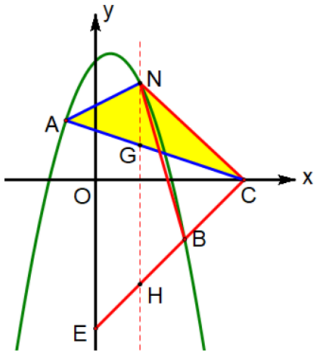


图 4

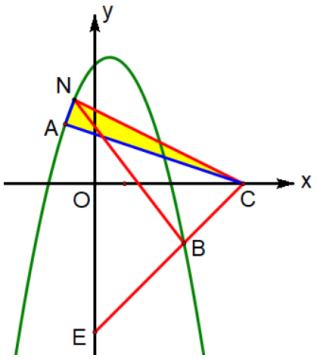


图 5

②直线 OF 与抛物线的交点的横坐标是 $\frac{1+\sqrt{65}}{4}$ 或 $\frac{1-\sqrt{65}}{4}$.

考点伸展

第（3）②题这样思考：

如图 6，延长 FC 交直线 AB 于点 Q，那么 $\angle FBA-\angle BFC=\angle Q$.

已知 $\angle FBA+\angle AOD-\angle BFC=45°$，所以 $\angle Q+\angle AOD=45°$.

又因为 $\angle AOD+\angle OAB=45°$，所以 $\angle Q=\angle OAB$. 所以 $AO//FQ$.

因为 $\triangle AMF$ 是等腰直角三角形，AB 与坐标轴的夹角是 $45°$，所以 $AF//x$ 轴.

所以四边形 $AOCF$ 是平行四边形. 按照 $O\to A$ 的方向平移点 $C(5, 0)$，先向左平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位，得点 $F(4, 2)$.

所以直线 OF 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x$.

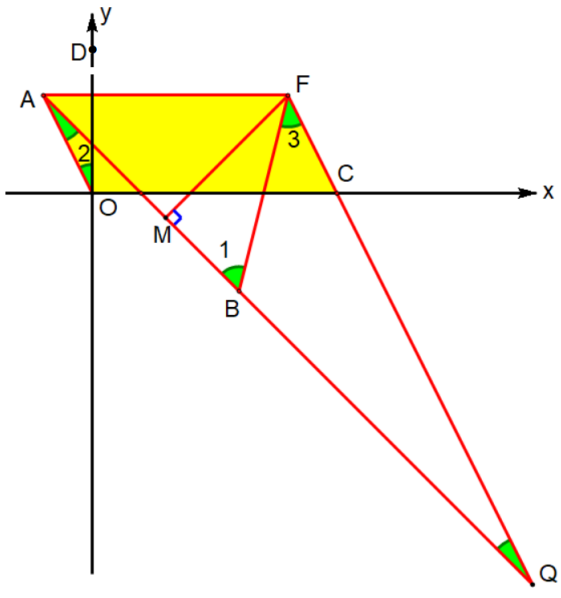


图 6

联立直线 OF 和抛物线的解析式，就可得直线 OF 与抛物线的交点的横坐标.