例　　2020 年包头市中考第 26 题

如图 1，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2-2x$ 经过坐标原点，与 x 轴正半轴交于点 A，该抛物线的顶点为 M，直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 经过点 A，与 y 轴交于点 B，连结 OM.

（1）求 b 的值及点 M 的坐标；

（2）将直线 AB 向下平移，得到过点 M 的直线 $y=mx+n$，且与 x 轴负半轴交于点 C，取点 $D(2, 0)$，连结 DM，求证：$\angle ADM-\angle ACM=45°$；

（3）点 E 是线段 AB 上一动点，点 F 是线段 OA 上一动点，连结 EF，线段 EF 的延长线与线段 OM 交于点 G. 当 $\angle BEF=2\angle BAO$ 时，是否存在点 E，使得 $3GF=4EF$？若存在，求出点 E 的坐标；若不存在，请说明理由.

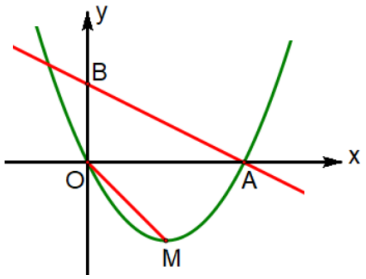


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“20 包头 26”，可以体验到，$\triangle CMD\backsim\triangle CAM$. 点击屏幕左下方的按钮“第（3）题”，拖动点 E 运动，可以体验到，EF 与 QO 保持平行，Q 是 AB 的中点.

思路点拨

1. 过点 M 与 AB 平行的直线，斜率是相等的.
2. 把求证 $\angle ADM-\angle ACM=45°$ 转化为证明 $\angle CMD=45°$.
3. 第第（3）题先要理解 $\angle BEF=2\angle BAO$ 的意义，直线 EF 的斜率是确定的.

满分解答

（1）由 $y=\frac{1}{3}x^2-2x=\frac{1}{3}x(x-6)=\frac{1}{3}(x-3)^2-3$，得 $A(6, 0)$，顶点 $M(3,-3)$.

将点 $A(6, 0)$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x+b$，得 $-3+b=0$. 解得 $b=3$.

（2）如图 2，作 $MH\perp x$ 轴于 H.

因为 $CM//AB$，所以 $\angle MCH=\angle BAO$. 由 $\tan\angle MCH=\tan\angle BAO$，得 $\frac{MH}{CH}=\frac{BO}{AO}=\frac{1}{2}$.

所以 $CH=2MH=6$. 所以 $OC=3$，$C(-3, 0)$.

如图 3，连结 AM. 已知 $C(-3, 0)$，$D(2, 0)$，$A(6, 0)$，$M(3,-3)$，所以 $\angle CAM=45°$，$CD=5$，$CA=9$，$CM^2=45$.

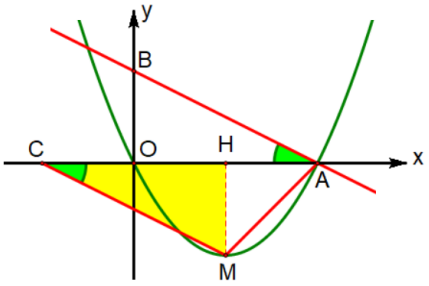


图 2

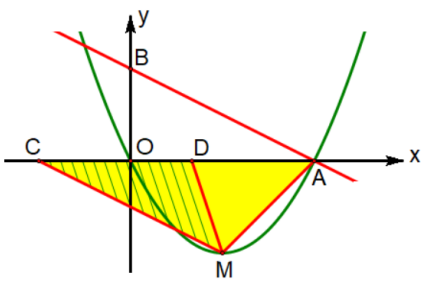


图 3

所以 $CM^2=CD\cdot CA$．所以 $\dfrac{CD}{CM}=\dfrac{CM}{CA}$．

又因为∠ACM 是公共角，所以△CMD∽△CAM．

所以∠CMD＝∠CAM＝45°．所以∠ADM－∠ACM＝∠CMD＝45°．

（3）第一步，理解∠BEF＝2∠BAO 的意义．

设 OQ 是 Rt△BOA 斜边上的中线，那么 QO＝QA，所以∠QOA＝∠QAO．

所以∠BQO＝2∠BAO．

如果∠BEF＝2∠BAO，那么∠BQO＝∠BEF．所以 EF//QO．

第二步，转化 3GF＝4EF．

作 EE'⊥x 轴于 E'，作 GG'⊥x 轴于 G'，那么 $\tan\angle EFE'=\tan\angle GFG'=\dfrac{1}{2}$．

如果 3GF＝4EF，那么 $\dfrac{GF}{EF}=\dfrac{4}{3}$．所以 $\dfrac{G'F}{E'F}=\dfrac{4}{3}$．

设 $G'F$＝4m，$F'F$＝3m，那么 GG'＝2m，$EE'=\dfrac{3}{2}m$．

因为∠GOG'＝45°，所以 OG'＝GG'＝2m．

所以 OE'＝2m＋4m＋3m＝9m，$E\left(9m,\dfrac{3}{2}m\right)$．

将点 E 代入 $y=-\dfrac{1}{2}x+b$．得 $\dfrac{3}{2}m=-\dfrac{9}{2}m+3$．解得 $m=\dfrac{1}{2}$．所以 $E\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{3}{4}\right)$．

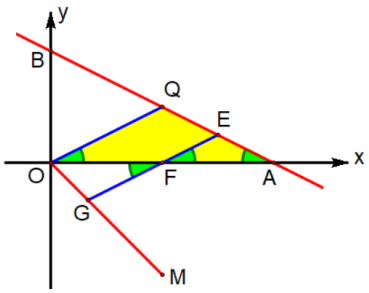


图 4

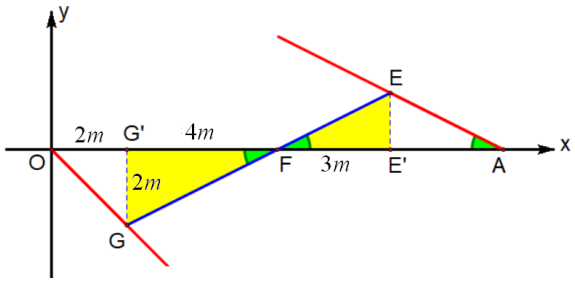


图 5

考点伸展

第（2）题求解 45°角的问题的方法多种多样，也可以这样思考：

如图 6，绕点 $D(2,0)$将点 $M(3,-3)$顺时针旋转 90°得到点 $N(-1,-1)$，再验证点 N 在直线 CM 上．

作 NK⊥x 轴于 K，那么 $\dfrac{NK}{CK}=\dfrac{MH}{CH}=\dfrac{1}{2}$．

所以 C、N、M 三点共线．因为△DMN 是等腰直角三角形，所以∠CMD＝45°．

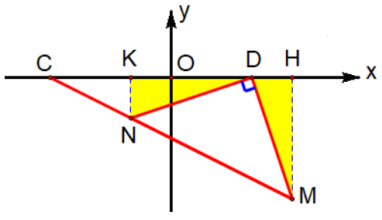


图 6