例　2020 年贵州省黔西南州中考数学第 26 题

已知抛物线 $y=ax^2+bx+6$ 交 x 轴于点 $A(6, 0)$和点 $B(-1, 0)$，交 y 轴于点 C.

（1）求抛物线的解析式和顶点坐标；

（2）如图 1，点 P 是抛物线上位于直线 AC 上方的动点，过点 P 分别作 x 轴、y 轴的平行线，交直线 AC 于点 D、E，当 $PD+PE$ 取得最大值时，求点 P 的坐标；

（3）如图 2，点 M 为抛物线对称轴 l 上一点，点 N 为抛物线上一点，当直线 AC 垂直平分△AMN 的边 MN 时，求点 N 的坐标.

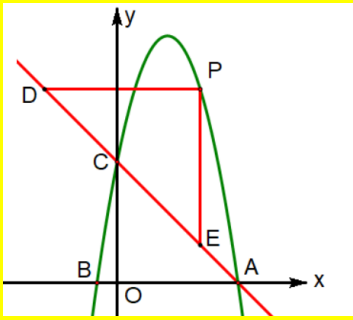


图 1

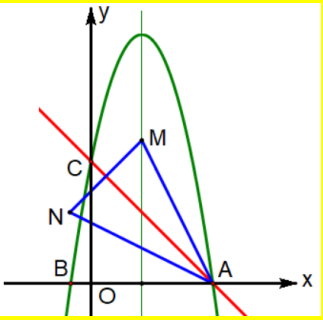


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“20 黔西南 26”，拖动点 P 在直线 AC 上方的抛物线上运动，可以体验到，△PDE 是等腰直角三角形，当点 E 在 AC 的中点时，PE 达到最大值．点击屏幕左下方的按钮“第（3）题”，拖动点 M 在抛物线的对称轴上一点，可以体验到，点 N 有两个时刻利用落在抛物线上.

思路点拨

1. 第（1）题可以重新设交点式，根据常数项相等，解得 a 的值.

2. 第（2）题把 $PD+PE$ 转化为 $2PE$，因为△PDE 是等腰直角三角形.

3. 第（3）题的关键是理解点 N 的纵坐标的几何意义．以 AC 为对称轴构造正方形，使得 M、N 两点落在正方形的边上.

满分解答

（1）因为抛物线交 x 轴于 $A(6, 0)$、$B(-1, 0)$两点，所以 $y=a(x-6)(x+1)$.

对照 $y=ax^2+bx+6$，根据常数项相等，得 $-6a=6$．解得 $a=-1$.

所以 $y=-(x-6)(x+1)=-x^2+5x+6$.

对称轴是 $x=\frac{5}{2}$，顶点坐标为 $(\frac{5}{2},\frac{49}{4})$.

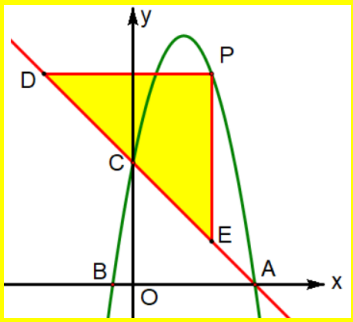


图 3

（2）如图 3，由 $A(6, 0)$、C$(0, 6)$，可知∠$CAO=45°$，直线 AC 的解析式为 $y=-x+6$.

所以△PDE 是等腰直角三角形，$PD+PE=2PE$.

设 $P(x,-x^2+5x+6)$，$E(x,-x+6)$.

所以 $PE=(-x^2+5x+6)-(-x+6)$

$=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$.

当 $x=3$ 时，PE 取得最大值，最大值为 9．所以 $PD+PE$ 的最大值为 18.

此时 $P(3, 12)$．这是一个典型结论：当 E 是 AC 的中点时，PE 取得最大值.

（3）如图 4 所示，因为 AC 与 x 轴的夹角为 45°，AC 垂直平分 MN，以直线 AC 为对称轴构造正方形 $APGH$，使得 PG 经过点 M，GH 经过点 N.

根据对称性，$NH=MP=6-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$. 所以点 N 的纵坐标为 $\frac{7}{2}$.

解方程 $-x^2+5x+6=\frac{7}{2}$，得 $x=\frac{5\pm\sqrt{35}}{2}$.

所以 $N(\frac{5-\sqrt{35}}{2},\frac{7}{2})$（如图 5 所示），或 $(\frac{5+\sqrt{35}}{2},\frac{7}{2})$（如图 6 所示）.

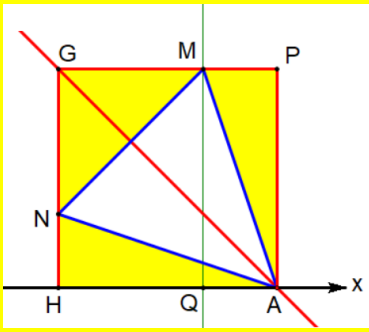


图 4

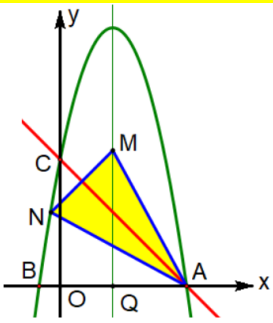


图 5

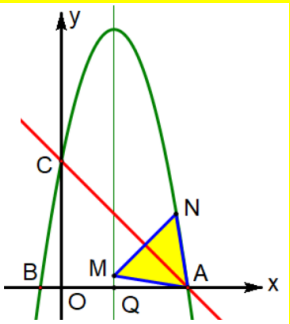


图 6

考点伸展

第（3）题的构图是初二几何学习正方形时的一个典型图，这道题目还可以这样解：

如图 7 所示，设抛物线的对称轴与直线 AC 交于点 F，与 x 轴交于点 Q，那么△AFQ 是腰长为 $\frac{7}{2}$ 的等腰直角三角形.

因为点 F 在 MN 的垂直平分线上，所以 $FM=FN$.

又因为∠$NMF=45°$，所以∠$MNF=45°$. 所以∠$MFN=90°$.

所以 $NF//x$ 轴，点 N 的纵坐标为 $\frac{7}{2}$.

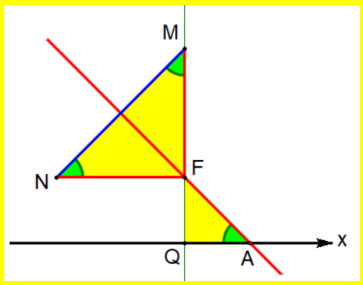


图 7