## 例　　2020 年荆门市中考第 24 题

如图，抛物线 $L$：$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x-3$ 与 $x$ 轴正半轴交于点 $A$，与 $y$ 轴交于点 $B$.

（1）求直线 $AB$ 的解析式及抛物线的顶点坐标；

（2）如图 1，点 $P$ 为第四象限且在对称轴右侧抛物线上一动点，过点 $P$ 作 $PC\perp x$ 轴，垂足为 $C$，$PC$ 交 $AB$ 于点 $D$，求 $PD+BD$ 的最大值，并求出此时点 $P$ 的坐标；

（3）如图 2，将抛物线 $L$：$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x-3$ 向右平移得到抛物线 $L'$，直线 $AB$ 与抛物线 $L'$交于 $M$、$N$ 两点，若点 $A$ 是线段 $MN$ 的中点，求抛物线 $L'$的解析式.

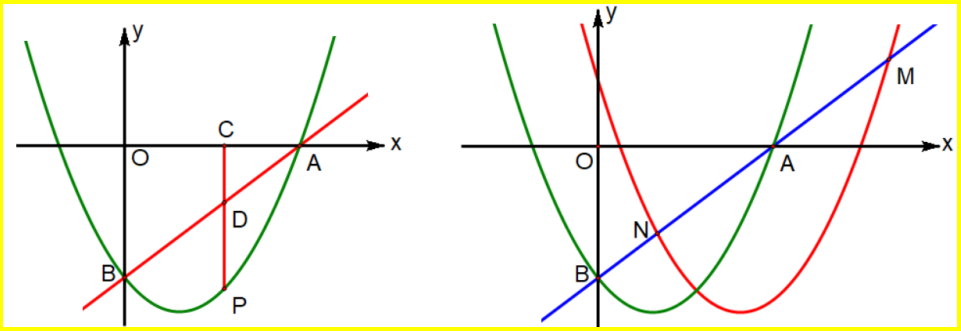



图 1　　图 2

### 动感体验

请打开几何画板文件名“20 荆门 24”，拖动点 $P$ 运动，可以体验到，$PD+BD$ 随点 $P$ 运动变化的图像是开口向下的抛物线的一部分．点击屏幕左下方的按钮“第（3）题”，拖动表示实数 $m$ 的点运动，抛物线随之平移，存在某一时刻，点 $A$ 是线段 $MN$ 的中点．

### 思路点拨

1．第（2）题中 $P$、$D$、$C$ 三点的横坐标 $x$ 相同，先用 $x$ 表示出 $PD$、$BD$ 的长，然后求关于 $x$ 的二次函数的最大值．

2．第（3）题先设平移后的抛物线的顶点式，这样只待定一个系数．

3．如果点 $A$ 是线段 $MN$ 的中点，那么 $x_M+x_N=2x_A$.

### 满分解答

（1）由 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x-3=\frac{1}{2}(2x+3)(x-4)$，得 $A(4,0)$，$B(0,-3)$.

由 $A(4,0)$、$B(0,-3)$，得直线 $AB$ 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x-3$.

抛物线的对称轴是 $x=\frac{5}{4}$，此时 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x-3=\frac{1}{2}\times\frac{25}{16}-\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}-3=-\frac{121}{32}$.

所以顶点为 $\left(\frac{5}{4},-\frac{121}{32}\right)$.

（2）设 $C(x,0)$，$P\left(x,\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x-3\right)$，$D\left(x,-\frac{3}{4}x-3\right)$.

所以 $PD=\left(-\frac{3}{4}x-3\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x-3\right)=-\frac{1}{2}x^2+2x$.

作 $DE\perp y$ 轴于 $E$．由 $\frac{BD}{ED}=\frac{BA}{OA}=\frac{5}{4}$，得 $BD=\frac{5}{4}ED=\frac{5}{4}x$.

所以 $PD+BD=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{4}x=-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{4}x=-\frac{1}{2}x(x-\frac{13}{2})$.

当 $x=\frac{13}{4}$ 时，$PD+BD$ 取得最大值，最大值 $=-\frac{1}{2}\times\frac{13}{4}(\frac{13}{4}-\frac{13}{2})=\frac{169}{32}$.

（3）设抛物线 $L'$ 的顶点式为 $y=\frac{1}{2}(x-m)^2-\frac{121}{32}$.

由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}(x-m)^2-\frac{121}{32},\\ y=-\frac{3}{4}x-3,\end{cases}$ 消去 $y$，整理，得 $16x^2-(32m+24)x+16m^2-25=0$.

所以 $x_M+x_N=\frac{32m+24}{16}$.

如果点 $A$ 是线段 $MN$ 的中点，那么 $x_M+x_N=2x_A$. 所以 $\frac{32m+24}{16}=8$.

解得 $m=\frac{13}{4}$. 所以抛物线 $L'$ 为 $y=\frac{1}{2}(x-\frac{13}{4})^2-\frac{121}{32}=\frac{1}{2}x^2-\frac{13}{4}x+\frac{3}{2}$

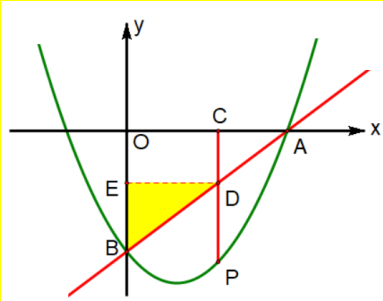



图 3

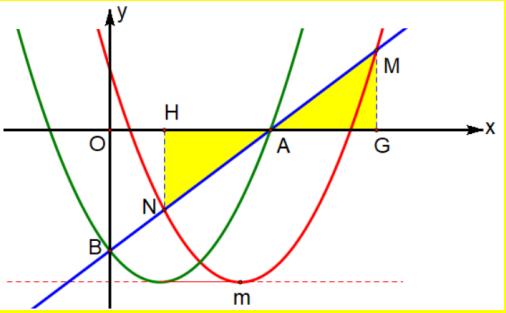



图 4

**考点伸展**

如果点 $P$ 在第四象限（实质是在直线 $AB$ 下方）的抛物线上运动，那么当点 $P$ 在 $AB$ 的中点的正下方时，$PD$ 取得最大值，$\triangle PAB$ 的面积也最大. 这是一个经典的结论.