例　　2020 年孝感市中考第 24 题

在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y=ax^2+4ax+4a-6$（$a>0$）与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C，顶点为点 D.

（1）当 $a=6$ 时，直接写出点 A、B、C、D 的坐标；

（2）如图 1，直线 DC 交 x 轴于点 E，若 $\tan\angle AED=\frac{4}{3}$，求 a 的值和 CE 的长；

（3）如图 2，在（2）的条件下，若点 N 为 OC 的中点，动点 P 在第三象限的抛物线上，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 Q，交 AN 于点 F；过点 F 作 $FH\perp DE$，垂足为 H. 设点 P 的横坐标为 t，记 $f=FP+FH$.

①用含 t 的代数式表示 f；

②设 $-5<t\leqslant m$（$m<0$），求 f 的最大值.

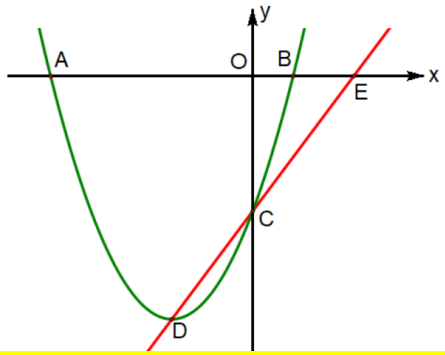


图 1

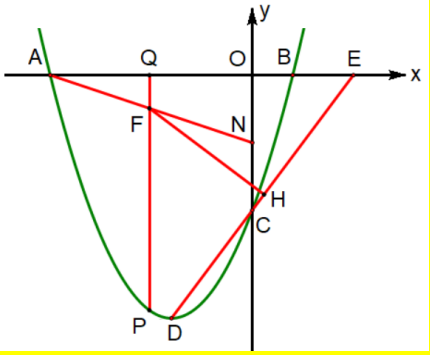


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“20 孝感 24”，拖动点 P 在第三象限的抛物线上运动，可以体验到，FP 是关于 t 的二次函数，FH 是关于 t 的一次函数，f 是关于 t 的二次函数.

思路点拨

1. 由抛物线的顶点式可知，顶点 D 是确定的.

2. 直线 DC 与 x 轴的夹角确定，那么点 C 的位置就确定，抛物线就确定了.

3. 第（3）题先要寻求 FH 用 t 表示的方法. 延长 FP 与直线 DE 交于点 M，那么 $\triangle FHM$ 的三边比是确定的，先用 t 表示 FM.

满分解答

（1）由 $y=6x^2+24x+18=6(x^2+4x+3)=6(x+3)(x+1)=6(x+2)^2-6$，

得 $A(-3,0)$，$B(-1,0)$，$C(0,18)$，$D(-2,-6)$.

（2）由 $y=ax^2+4ax+4a-6=a(x+2)^2-6$，得 $D(-2,-6)$，$C(0,4a-6)$.

作 $DG\perp x$ 轴于 G.

由 $\tan\angle AED=\frac{DG}{EG}=\frac{4}{3}$，得 $EG=\frac{3}{4}DG=\frac{3}{4}\times 6=\frac{9}{2}$. 所以 $EO=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$.

在 Rt$\triangle EOC$ 中，$CO=\frac{4}{3}EO=\frac{4}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{10}{3}$，$CE=\frac{5}{3}EO=\frac{5}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{25}{6}$.

由 $C(0,4a-6)$，$CO=\frac{10}{3}$，得 $-(4a-6)=\frac{10}{3}$. 解得 $a=\frac{2}{3}$.

（3）①第一步，求直线 AN、DE 的解析式.

由 $y=\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x-\frac{10}{3}=\frac{2}{3}(x+5)(x+1)$，得 $A(-5,0)$.

由 $A(-5,0)$、$N(0,-\frac{5}{3})$，得直线 AN 的解析式为 $y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$.

由 $D(-2,-6)$、$C(0,-\frac{10}{3})$，得直线 DE 的解析式为 $y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$.

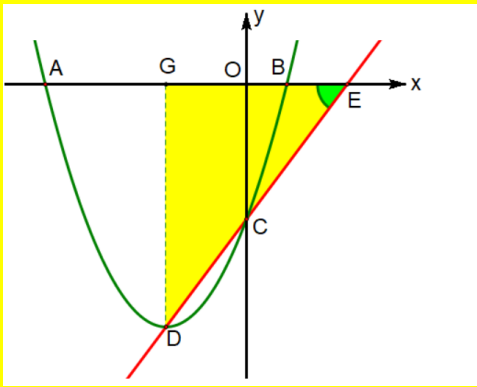


图 3

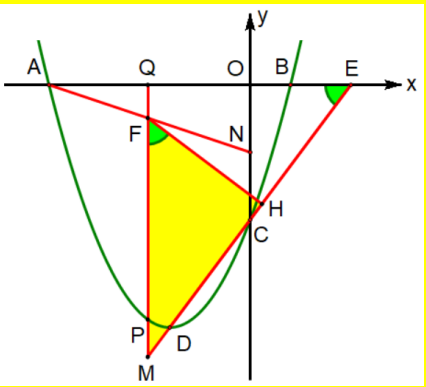


图 4

第二步，用 t 表示 FP、FH 的长．延长 FP 交直线 DE 于点 M.

由 $F(t,-\frac{1}{3}t-\frac{5}{3})$，$P(t,\frac{2}{3}t^2+\frac{8}{3}t-\frac{10}{3})$，$M(t,\frac{4}{3}t-\frac{10}{3})$，

得 $FP=y_F-y_P=-\frac{2}{3}t^2-3t+\frac{5}{3}$，$FM=y_F-y_M=-\frac{5}{3}t+\frac{5}{3}$.

所以 $FH=\frac{3}{5}FM=\frac{3}{5}\left(-\frac{5}{3}t+\frac{5}{3}\right)=-t+1$.

所以 $f=FP+FH=\left(-\frac{2}{3}t^2-3t+\frac{5}{3}\right)+(-t+1)=-\frac{2}{3}t^2-4t+\frac{8}{3}$.

②因为 $f=-\frac{2}{3}t^2-4t+\frac{8}{3}$，所以 f 是 t 的二次函数，图像是开口向下的抛物线的一部分，对称轴是 $t=-3$.

因为对称轴在 $-5<t\leqslant m$（$m<0$）范围内，因此当 $t=-3$ 时，f 取得最大值.

当 $t=-3$ 时，$f=-\frac{2}{3}t^2-4t+\frac{8}{3}=-\frac{2}{3}\times 9-4\times 3+\frac{8}{3}=\frac{26}{3}$.

考点伸展

我们未解先知一下：因为 F、M 两点分别在两条直线上，这两点的横坐标都是 t，所以纵坐标相减，得到的也是关于 t 的一次函数．而 FH 与 FM 是正比例关系，所以 FH 是关于 t 的一次函数.

同样的道理，点 F、P 两点的纵坐标相减，得到的是关于 t 的二次函数.

所以 $f=FP+FH$ 是关于 t 的二次函数.