❾（20 重庆 A26）如图 1，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，点 D 是 BC 边上一动点，联结 AD，把 AD 绕点 A 逆时针旋转 90°，得到 AE，联结 CE、DE，点 F 是 DE 的中点，联结 CF.

（1）求证：$CF=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$；

（2）如图 2 所示，在点 D 运动的过程中，当 $BD=2CD$ 时，分别延长 CF、BA，相交于点 G，猜想 AG 与 BC 存在的数量关系，并证明你猜想的结论；

（3）在点 D 运动的过程中，在线段 AD 上存在一点 P，使 $PA+PB+PC$ 的值最小，当 $PA+PB+PC$ 的值取得最小值时，AP 的长为 m，请直接用含 m 的式子表示 CE 的长.

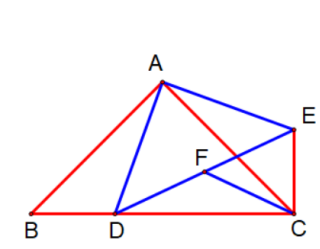


图 1

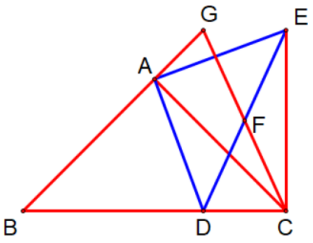
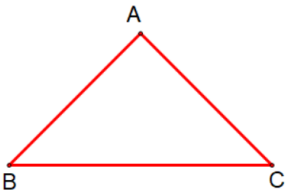


图 2



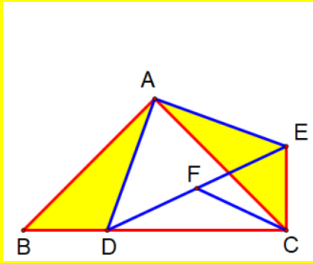
备用图

❾（1）如图 1，在等腰直角三角形 ADE 中，$DE=\sqrt{2}AD$.

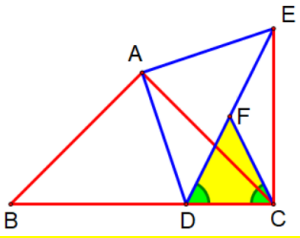
因为 $AB=AC$，$AD=AE$，$\angle DAE=\angle BAC=90°$，所以△$BAD$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 可以与△CAE 重合.

根据对应线段所在直线的夹角等于旋转角，可知 $\angle BCE=90°$.

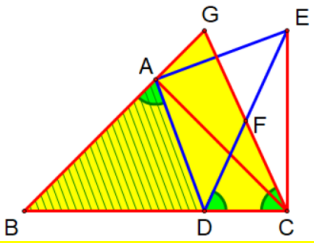
所以 CF 是 Rt△DCE 斜边上的中线，$CF=\frac{1}{2}DE=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$.



第 9 题图 1



第 9 题图 2



第 9 题图 3

（2）如图 2，由 $CF=\frac{1}{2}DE=DF$，得 $\angle FCD=\angle FDC$.

如图 3，因为 $\angle ADC=\angle B+\angle BAD=\angle ADE+\angle FDC$，$\angle B=\angle ADE=45°$，所以 $\angle BAD=\angle FDC$.

等量代换，得 $\angle BAD=\angle FCD$.

又因为 $\angle B=\angle B$，所以△$BAD\backsim$△BCG. 所以 $\frac{BG}{BD}=\frac{BC}{BA}=\sqrt{2}$. 所以 $BG=\sqrt{2}BD$.

设 $BD=4m$，$DC=2m$，那么 $AB=AC=3\sqrt{2}m$. 所以 $BG=\sqrt{2}BD=4\sqrt{2}m$.

所以 $AG=BG-AB=4\sqrt{2}m-3\sqrt{2}m=\sqrt{2}m$. 所以 $\frac{BC}{AG}=\frac{6m}{\sqrt{2}m}=3\sqrt{2}$.

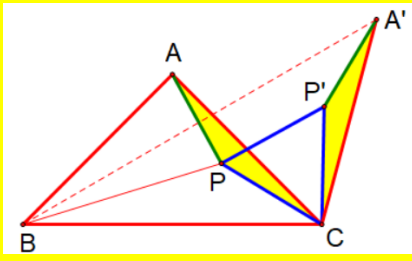
（3）如图 4，将△PAC 绕点 C 顺时针旋转 60° 得△$P'A'C$，那么点 A'的位置是确定的.

联结 PP'，所以△CPP'是等边三角形. 所以 $PA+PB+PC=P'A'+PB+P'P$.

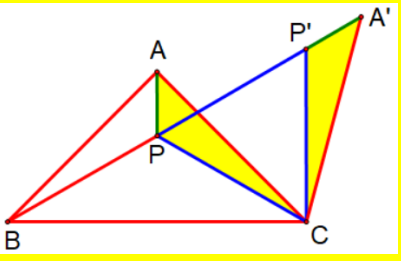
根据两点之间线段最短，可知 $BP+PP'+P'A'>BA'$.

如图 5，当 B、P、P'、A'四点共线时，$BP+PP'+P'A'$的值最小，最小值为 BA'.

此时 $\angle BPC=\angle CP'A'=\angle CPA=\angle BPA=120°$.



第 9 题图 4



第 9 题图 5

如图 6，△ABA'是顶角为 150° 的等腰三角形，所以 $\angle 1=\angle 2=15°$.

所以 $\angle 4=45°-15°=30°$.

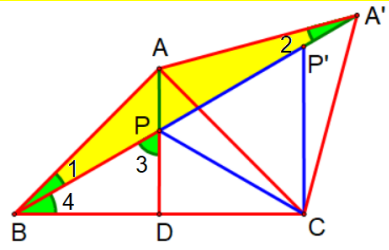
又因为 $\angle 3$ 的邻补角等于 120°，所以 $\angle 3=60°$. 所以 $AD\perp BC$.

所以 AD 是等腰直角三角形 ABC 斜边上的高.

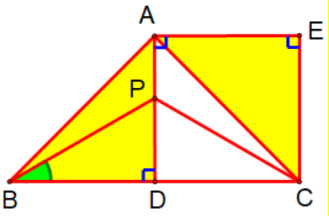
所以四边形 $ADCE$ 是正方形（如图 7 所示）. 设正方形的边长为 x.

在 Rt△PBD 中，由 $\angle PBD=30°$，得 $BD=\sqrt{3}PD$.

所以 $x=\sqrt{3}(x-m)$. 解得 $x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}m$.



第 9 题图 6



第 9 题图 7