例　　2020 年临沂市中考第 26 题

如图 1，菱形 $ABCD$ 的边长为 1，$\angle ABC=60°$，点 E 是边 AB 上任意一点（端点除外），线段 CE 的垂直平分线交 BD、CE 分别于点 F、G，AE、EF 的中点分别为 M、N.

（1）求证：$AF=EF$；

（2）求 $MN+NG$ 的最小值；

（3）当点 E 在 AB 上运动时，$\angle CEF$ 的大小是否变化？为什么？

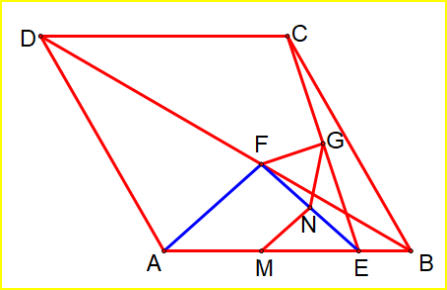


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“20 临沂 26”，拖动点 E 在 AB 上运动，可以体验到，A、E、C 三点在以 F 为圆心的圆上，等腰三角形 FCE 的顶角等于 120° 保持不变. 当 CE 与 AB 垂直时，点 N 落在 MG 上，此时 $MN+NG$ 取得最小值.

思路点拨

1. 已知 M、N、G 三个中点，那么三条中位线中，$MN+NG$ 的最小值等于 MG，等于 AC 的一半.

2. 由 $FA=FC=FE$，可知 A、B、C 三点在以 F 为圆心的圆上，根据同弧所对的圆周角等于圆心角的一半，可知 $\angle CFE=2\angle CAE$ 为定值.

满分解答

（1）如图 2，连结 CF. 根据菱形的轴对称性，可得 $AF=CF$.

因为 FG 垂直平分 EG，所以 $CF=EF$. 所以 $AF=EF$.

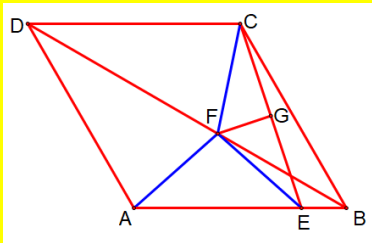


图 2

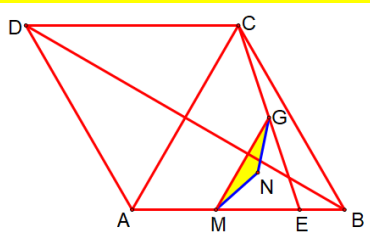


图 3

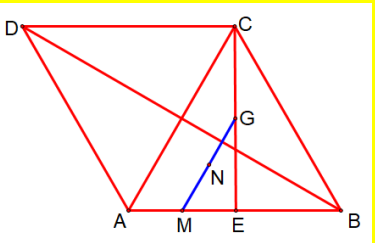


图 4

（2）如图 3，因为△ABC 是等边三角形，所以 $AC=1$.

因为 MG 是△EAC 的中位线. 所以 $MG=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}$.

在△NMG 中，根据两边之和大于第三边，得 $MN+NG>MG$.

所以当点 N 落在 MG 上时，$MN+NG$ 取得最小值（如图 4 所示）.

此时 $MN+NG=MG=\frac{1}{2}$.

（3）∠*CEF* 的大小不发生变化，理由如下：

如图 5，因为 *FA*＝*FC*＝*FE*，所以 *A*、*B*、*C* 三点在以 *F* 为圆心的圆上．

根据同弧所对的圆周角等于圆心角的一半，可得∠*CFE*＝2∠*CAE*＝120°．

所以△*FCE* 是顶角为 120°的等腰三角形，底角∠*CEF*＝30°为定值．

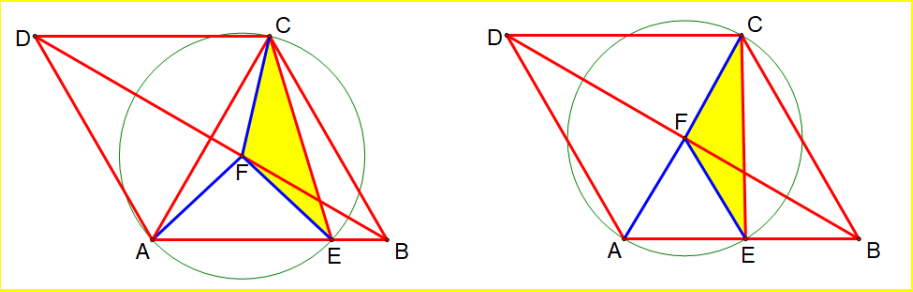


图 5　　图 6

考点伸展

大家来思考这样一个问题：第（3）题中⊙*F* 的半径 *EF* 什么时候最小呢？

如图 5，等腰△*CEF* 的形状是不变的，那么当底边 *CE* 最小时，腰长 *EF* 也最小．

根据垂线段最短，所以当 *CE*⊥*AB* 时，*CE* 最小，*EF* 也取得最小值（如图 6 所示）．

此时 $EF=AF=CF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}$．