例　　2020 年乐山市中考第 26 题

如图 1，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(5,0)$两点，C 为抛物线的顶点，抛物线的对称轴交 x 轴于点 D，连结 BC，且 $\tan\angle CBD=\frac{4}{3}$.

（1）求抛物线的解析式；

（2）设 P 是抛物线的对称轴上的一个动点.

①过点 P 作 x 轴的平行线交线段 BC 于点 E，过点 E 作 $EF\perp PE$ 交抛物线于点 F，连结 FB、FC，求△BCF 面积的最大值；

②连结 PB，求 $\frac{3}{5}PC+PB$ 的最小值.

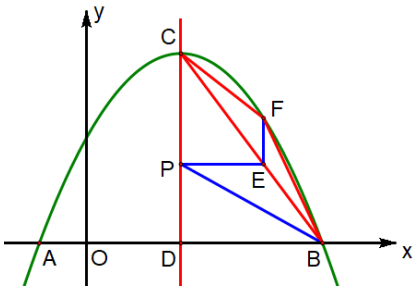


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“20 乐山 26”，拖动点 P 在 CD 上运动，可以体验到，当点 E 位于线段 BC 的中点时，△BCF 的面积最大．点击屏幕左下方的按钮“第（3）题”，拖动点 P 在 CD 上运动，观察右图可以体验到，PM 等于 $\frac{3}{5}PC$，PA 等于 PB，观察左图可以体验到，当点 P 落在 AH 上时，$PM+PA$ 取得最小值.

思路点拨

1．第（1）题设交点式求解最简便.

2．第（2）题△BCF 可以割补为共底的△CEF 和△BEF，高的和为定值 DB.

3．第（3）题首先要通过锐角三角比将 $\frac{3}{5}PC$ 转化为线段 PM，通过轴对称将 PB 转化为 PA，再根据三角形的三边关系及垂线段最短，求得 $PM+PA$ 的最小值.

满分解答

（1）由抛物线与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(5,0)$两点，得 AB 的中点 $D(2,0)$.

在 Rt△BCD 中，$\tan\angle CBD=\frac{CD}{BD}=\frac{4}{3}$，所以 $CD=\frac{4}{3}BD=4$．所以 $C(2,4)$.

设抛物线的交点式为 $y=a(x+1)(x-5)$，代入点 $C(2,4)$，得 $-9a=4$.

解得 $a=-\frac{4}{9}$．所以 $y=-\frac{4}{9}(x+1)(x-5)=-\frac{4}{9}x^2+\frac{16}{9}x+\frac{20}{9}$.

（2）如图 2，由 $B(5,0)$、$C(2,4)$，得直线 BC 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}$.

设 $F(x,-\frac{4}{9}x^2+\frac{16}{9}x+\frac{20}{9})$，$E(x,-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3})$.

所以 $EF=(-\frac{4}{9}x^2+\frac{16}{9}x+\frac{20}{9})-(-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3})=-\frac{4}{9}x^2+\frac{28}{9}x-\frac{40}{9}=-\frac{4}{9}(x-\frac{7}{2})^2+1$.

因为 $S_{\triangle BCF}=S_{\triangle CEF}+S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}EF\cdot(x_F-x_C)+\frac{1}{2}EF\cdot(x_B-x_F)$

$=\frac{1}{2}EF\cdot(x_B-x_C)=\frac{3}{2}EF=-\frac{2}{3}(x-\frac{7}{2})^2+\frac{3}{2}$.

所以当 $x=\frac{7}{2}$ 时，$\triangle BCF$ 的面积取得最大值，最大值为 $\frac{3}{2}$.

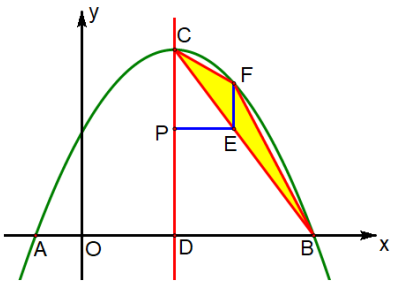


图 2

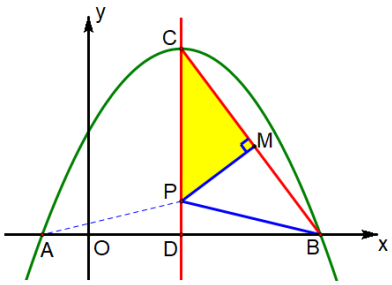


图 3

②如图 3，作 $PM\perp BC$ 于 M，连结 PA.

在 Rt$\triangle CPM$ 中，$PM=PC\sin\angle BCD=\frac{3}{5}PC$.

又因为 $PA=PB$，所以 $\frac{3}{5}PC+PB=PM+PA$.

如图 4，作 $AH\perp BC$ 于 H，那么 $PM+PA>AM>AH$.

当点 P 落在 AH 上时，$PM+PA$ 最小（如图 5）. 此时 $PM+PA=AH$.

如图 5，在 Rt$\triangle ABH$ 中，$AH=AB\sin\angle CBD=6\times\frac{4}{5}=\frac{24}{5}$.

所以 $\frac{3}{5}PC+PB$ 的最小值为 $\frac{24}{5}$.

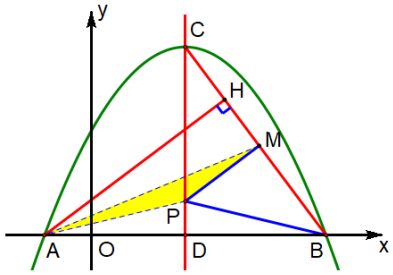


图 4

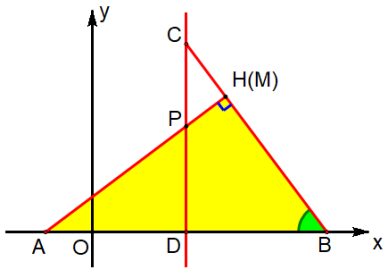


图 5

考点伸展

第（2）①题是一个教科书式的经典结论：直线与抛物线交于 B、C 两点，点 F 在 B、C 之间的抛物线上运动时，当点 E 是 BC 的中点时，FE 取得最大值，$\triangle FBC$ 的面积也最大.