例　　2020 年济宁市中考第 22 题

如图 1，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=AC$，点 E、F、G 分别在 BC、CD 上，$BE=CG$，AF 平分 $\angle EAG$，点 H 是线段 AF 上一动点（与点 A 不重合）.

（1）求证：$\triangle AEH\cong\triangle AGH$；

（2）当 $AB=12$，$BE=4$ 时.

①求 $\triangle DGH$ 周长的最小值；

②若点 O 是 AC 的中点，是否存在直线 OH 将 $\triangle ACE$ 分成三角形和四边形两部分，其中三角形的面积与四边形的面积比为 1∶3. 若存在，请求出 $\dfrac{AH}{AF}$ 的值；若不存在，请说明理由.

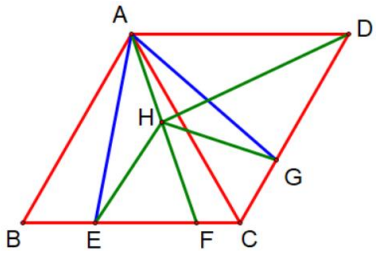


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“20 济宁 22”，拖动点 H 在 AF 上运动，可以体验到，HG 与 HE 保持相等，当点 H 落在 DE 上时，$HG+HD$ 取得最小值，$\triangle DGH$ 的周长也最小.

点击屏幕左下角的按钮“第（3）题”，可以体验到，当点 P 是 AE 或 CE 的中点时，直线 OH 分成的三角形与 $\triangle ACE$ 的面积比是 1∶4.

思路点拨

1. 第（1）题给第（2）题提供了 $HG=HE$，于是第（2）题就是“牛喝水”问题，河流是对称轴 AF.

2. 第（3）题先把分成的小三角形与 $\triangle ACE$ 的面积比转化为 1∶4，再分两种情况讨论. 直线 OH 与 AC 交于 AC 的中点，或与 CE 交于 CE 的中点.

满分解答

（1）如图 2，因为 $AB=AC$，$AB=BC$，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

因为 $AB=AC$，$\angle B=\angle ACG=60°$，$BE=CG$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle ACG$.

所以 $AE=AG$.

又因为 $\angle EAH=\angle GAH$，$AH=AH$，所以 $\triangle EAH\cong\triangle GAH$.

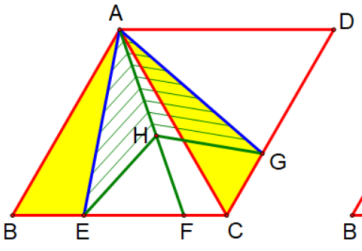


图 2

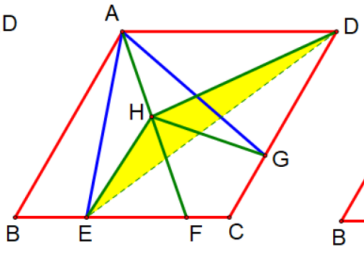


图 3

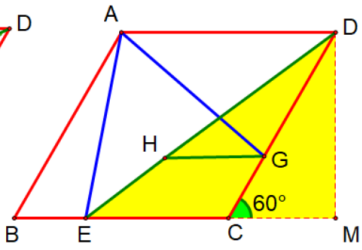


图 4

（2）①如图 2，由 $\triangle EAH\cong\triangle GAH$，得 $HG=HE$.

由 $BE=CG=4$，$DC=AB=12$，得 $DG=12-4=8$.

如图 3，在 $\triangle DGH$ 中，DG 为定值. 所以当 $HD+HG$ 取得最小值时，$\triangle DGH$ 的周长最小. 等量代换，当 $HD+HE$ 取得最小值时，$\triangle DGH$ 的周长最小.

当点 H 落在线段 DE 上时，$HD+HE$ 取得最小值（如图 4 所示）.

如图 4，作 $DM\perp BC$ 交 BC 的延长线于点 M.

在 Rt△*DCM* 中，∠*DCM*＝60°，*DC*＝12，所以 *CM*＝6，*DM*＝$6\sqrt{3}$.

在 Rt△*DEM* 中，*EM*＝*EC*＋*CM*＝8＋6＝14，由勾股定理，得 *DE*＝$4\sqrt{19}$.

所以△*DGH* 周长的最小值等于 $4\sqrt{19}+8$.

②如果分成的三角形与四边形的面积比为 1∶3，那么这个三角形的面积与△*ACE* 的面积比是 1∶4.

连结 *OE*．因为 *O* 是 *AC* 的中点，所以 *OE* 平分△*ACE* 的面积.

情形一，如图 5，直线 *OH* 与 *AE* 交于 *AE* 的中点 *P*，那么 $\frac{S_{\triangle AOP}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{1}{4}$.

因为 *OP* 是△*ACE* 的中位线，所以 *OP*//*CE*．此时 $\frac{AH}{AF}=\frac{AO}{AC}=\frac{1}{2}$.

情形二，如图 6，直线 *OH* 与 *CE* 交于 *CE* 的中点 *P*，那么 $\frac{S_{\triangle COP}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{1}{4}$.

因为 *OP* 是△*ACE* 的中位线，所以 *OP*//*AE*.

延长 *PO* 交 *AD* 于点 *Q*，那么四边形 *AEPQ* 是平行四边形，*AQ*＝*EP*＝4.

由△*AEF* 与△*AGF* 关于直线 *AF* 对称，得 *EF*＝*GF*．设 *EF*＝*GF*＝*m*.

如图 7，作 *GN*⊥*BC* 交 *BC* 的延长线于点 *N*，那么 *CN*＝2，*GN*＝$2\sqrt{3}$.

由 $EF^2=GF^2$，得 $m^2=(2\sqrt{3})^2+(10-m)^2$．解得 $m=\frac{28}{5}$.

所以 $PF=EF-EP=\frac{28}{5}-4=\frac{8}{5}$．所以 $\frac{AH}{FH}=\frac{AQ}{PF}=4\div\frac{8}{5}=\frac{5}{2}$．所以 $\frac{AH}{AF}=\frac{5}{7}$.

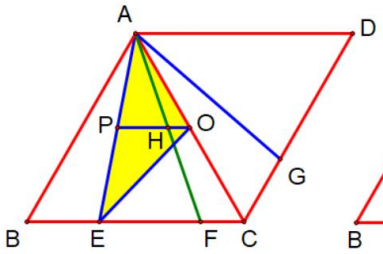


图 5

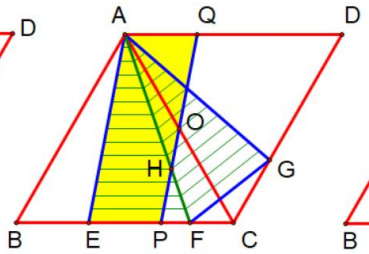


图 6

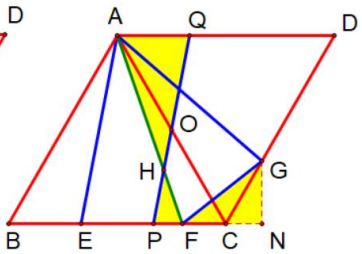


图 7

考点伸展

在本题情景下，连结 *EG*，那么△*AEG* 是等边三角形，*AF* 是等边三角形 *AEG* 的一条对称轴.