例　　2020 年广州市中考第 24 题

如图 1，⊙O 为等边三角形 ABC 的外接圆，半径为 2，点 D 在劣弧 AB 上运动（不与点 A、B 重合），连结 DA、DB、DC.

（1）求证：DC 是∠ADB 的平分线；

（2）四边形 $ADBC$ 的面积 S 是线段 DC 的长 x 的函数吗？如果是，求出函数解析式；如果不是，请说明理由；

（3）若点 M、N 分别在线段 CA、CB 上运动（不含端点），经过探究发现，点 D 运动到每一个确定的位置，△DMN 的周长有最小值 t，随着点 D 的运动，t 的值会发生变化，求所有 t 值中的最大值.

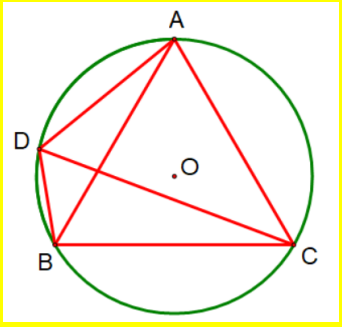


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“20 广州 24”，拖动点 D 运动，可以体验到，△$ADBC$ 的面积等于等边三角形 GDC 的面积．点击屏幕左下方的按钮“第（3）题”，拖动点 D 运动，可以体验到，△CEF 的形状是确定的，大小由 CD 确定，当 CD 时圆的直径时，EF 取得最大值．同时可以体验到，当点 M、N 落在 EF 上时，△DMN 的周长最小，最小值就是 EF 的长.

思路点拨

1．在同圆中，相等的弦所对的弧相等，等弧所对的圆周角相等.

2．根据圆内接四边形的对角互补，将△DBC 绕点 C 顺时针旋转 60°得到△GAC，那么 G、A、D 三点共线，△GDC 是等边三角形.

3．第（3）题先找点 D 关于 AC、BC 对称点 E、F，那么 EF 就是△DMN 周长的最小值，等腰三角形 CEF 的形状是确定的，大小由 CD 确定.

满分解答

（1）如图 2，因为 AC＝BC，所以 AC = BC ．所以∠ADC＝∠BDC.

所以 DC 是∠ADB 的平分线.

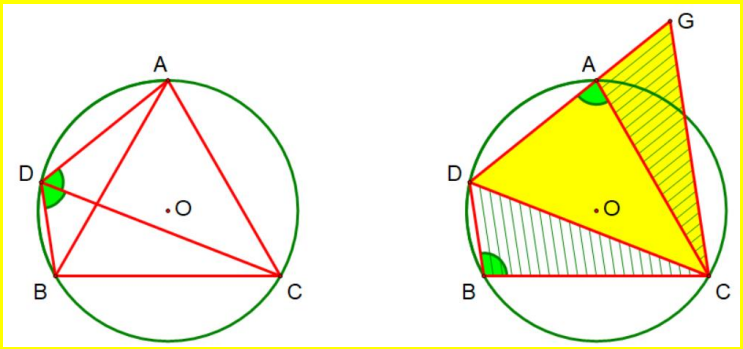


图 2　　图 3

（2）如图 3，根据圆内接四边形的对角互补，得∠DBC 与∠DAC 互补.

将△DBC 绕点 C 顺时针旋转 60°得△GAC，由∠GAC＝∠DBC，可知∠GAC 与∠DAC 互补，所以 D、A、G 三点共线.

在△GDC 中，∠GDC＝∠DGC＝60°，所以△GDC 是边长为 x 的等边三角形.

所以 $S_{△GDC}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

所以 $S_{四边形ADBC}=S_{△ADC}+S_{△DBC}=S_{△ADC}+S_{△GAC}=S_{△GDC}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

（3）如图 4，作点 D 关于直线 AC、BC 的对称点 E、F，连结 CE、CF、EF.

对于△CEF，$CE=CD=CF$，$\angle ECF=2\angle ACB=120°$.

所以△CEF 是顶角为 120° 的等腰三角形，形状是确定的，大小由 CD 确定.

如图 5，根据直径是圆中最长的弦，可知 CD 的最大值等于 4，所以 EF 的最大值为 $4\sqrt{3}$.

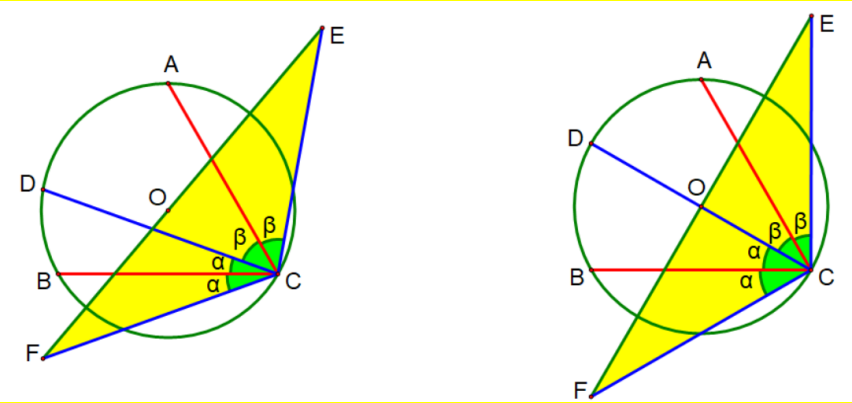


图 4　　图 5

如图 6，对于每一个确定的点 D 来说，$DM=EM$，$DN=FN$. 根据两点之间线段最短，可知当 M、N 落在 EF 上时，△DMN 的周长最小，最小值就是线段 EF 的长（如图 7）.

因此所有 t 值中的最大值是 $4\sqrt{3}$.

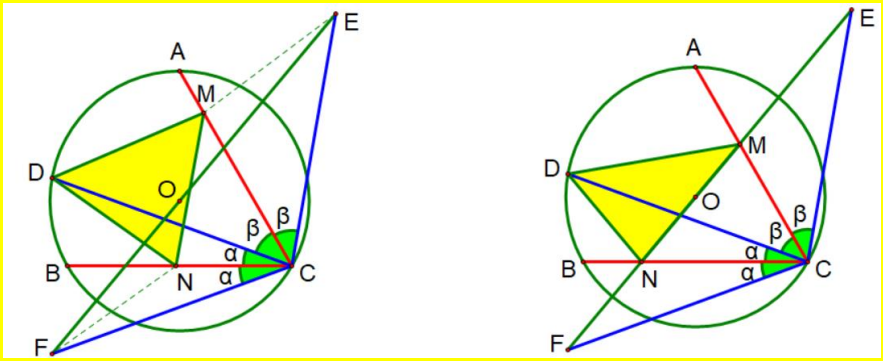


图 6　　图 7

考点伸展

在图 7 中，$\angle MDN$ 始终等于 60°. 这是因为，$\angle MDC=\angle E=30°$，$\angle NDC=\angle F=30°$. 所以 DC 也是 $\angle MDN$ 的平分线.