例　　2020 年达州市中考第 25 题

如图 1，在平面直角坐标系中，已知直线 $y=\frac{1}{2}x-2$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，过 A、B 两点的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于另一点 $C(-1,0)$.

（1）求抛物线的解析式；

（2）在抛物线上是否存在一点 P，使 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle OAB}$？若存在，请求出点 P 的坐标，若不存在，请说明理由；

（3）点 M 为直线 AB 下方抛物线上一点，点 N 为 y 轴上一点，当△MAB 的面积最大时，求 $MN+\frac{1}{2}ON$ 的最小值.

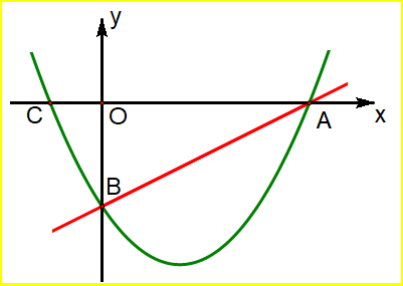


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“20 达州 25”，拖动点 M 在抛物线上运动，可以体验到，当点 M 位于线段 AB 的中点的正下方时，△MAB 的面积取得最大值．点击屏幕左下方的按钮“第（3）题—2”，拖动点 N 在 y 轴上运动，可以体验到，NG 总是等于 ON 的一半，当 G、H 两点重合时，$MN+NH$ 的值最小.

思路点拨

1．第（1）题设交点式求解比较简便.

2．第（2）题作 AB 的平行线与抛物线相交，得到的两个交点就是点 P.

3．第（3）题，第一步把△MAB 进行割补，求出点 M 的坐标；第二步通过构造含 30° 角的直角三角形将 $\frac{1}{2}ON$ 转化为 NH；最后根据三角形的三边关系及垂线段最短进行求解.

满分解答

（1）由 $y=\frac{1}{2}x-2$，得 $A(4,0)$、$B(0,-2)$.

因为抛物线与 x 轴交于 $A(4,0)$、$C(-1,0)$两点，设 $y=a(x-4)(x+1)$.

代入点 $B(0,-2)$，得 $-4a=-2$．解得 $a=\frac{1}{2}$.

所以抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}(x-4)(x+1)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$.

（2）如图 2，过点 O 作直线 AB 的平行线，与抛物线的交点就是点 P．根据平行线间的距离处处相等，可知△PAB 与△OAB 是同底等高的两个三角形，面积相等.

联立 $y=\frac{1}{2}x$ 和 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$，解得 $\begin{cases}x_1=2+2\sqrt{2},\\ y_1=1+\sqrt{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=2-2\sqrt{2},\\ y_2=1-\sqrt{2}.\end{cases}$

所以 $P_1(2+2\sqrt{2},1+\sqrt{2})$，$P_2(2-2\sqrt{2},1-\sqrt{2})$.

将直线 AB 向下平移 2 个单位，得到直线 $y=\frac{1}{2}x-4$。

联立 $y=\frac{1}{2}x-4$ 和 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$，解得 $\begin{cases}x_1=x_2=2,\\ y_1=y_2=-3.\end{cases}$ 所以 $P_3(2,-3)$.

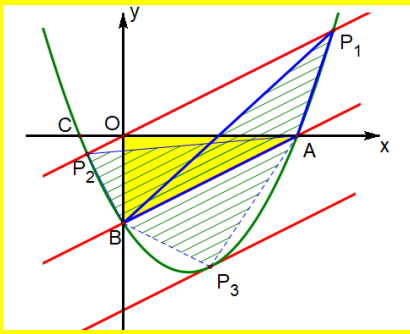


图 2

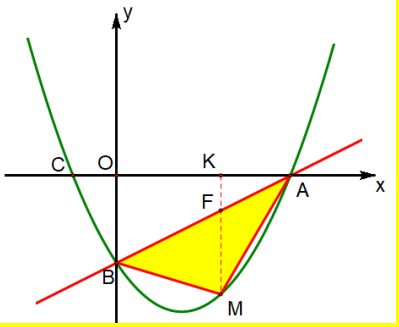


图 3

（3）如图 3，作 $MK\perp x$ 轴于 K，交 AB 于点 F.

由 $B(0,-2)$、$A(4,0)$，得直线 AB 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-2$.

设 $M(m,\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m-2)$，$F(m,\frac{1}{2}m-2)$.

所以 $FM=(\frac{1}{2}m-2)-(\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m-2)=-\frac{1}{2}m^2+2m=-\frac{1}{2}(m-2)^2+2$.

因为 $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle BFM}+S_{\triangle AFM}=\frac{1}{2}MF(x_A-x_B)=2MF=-(m-2)^2+4$，所以当 $m=2$ 时，$\triangle MAB$ 的面积最大．此时 $M(2,-3)$.

如图 4，作射线 OP，与 y 轴负半轴的夹角为 30°。作 $NG\perp OP$ 于 G，那么 $NG=\frac{1}{2}ON$.

作 $MD//x$ 轴，交 y 轴于点 E，交射线 OP 于点 D，那么 $\angle ODM=60°$.

作 $MH\perp OP$ 于点 H.

因为 $MN+\frac{1}{2}ON=MN+NG>MG>MH$，所以当 G、H 两点重合时，$MN+\frac{1}{2}ON$ 取得最小值（如图 5 所示），此时 $MN+\frac{1}{2}ON=MH$.

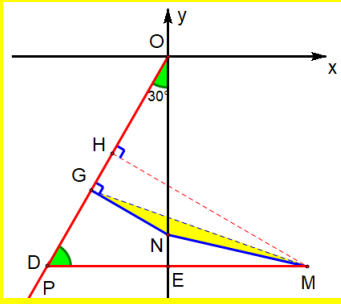


图 4

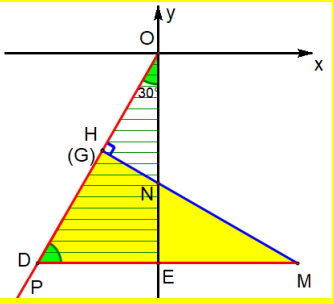


图 5

如图 5，在 Rt△ODE 中，$DE=OE\tan30^\circ=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

在 Rt△MDH 中，$DM=DE+EM=\sqrt{3}+2$，所以 $MH=DM\sin60^\circ=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$.

所以 $MN+\frac{1}{2}ON$ 的最小值是 $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$.

考点伸展

第（2）题还可以这样思考：

如图 6，作 $PQ\perp x$ 轴于 Q.

因为 $OP//BA$，所以∠1＝∠2．所以 tan∠1＝tan∠2.

所以 $\frac{PQ}{OQ}=\frac{BO}{AO}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$．所以 $PQ=\frac{1}{2}OQ$.

设 $P(x,\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2)$，那么 $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2=\frac{1}{2}x$.

整理，得 $x^2-4x-4=0$．解得 $x_1=2+2\sqrt{2}$，$x_2=2-2\sqrt{2}$.

所以 $P_1(2+2\sqrt{2},1+\sqrt{2})$，$P_2(2-2\sqrt{2},1-\sqrt{2})$．同理可求得 $P_3(2,-3)$.

