例　　2020 年陕西省中考第 24 题

如图 1，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 (3, 12)和(−4,−3)，与两坐标轴分别交于 A、B、C，它的对称轴为直线 l.

（1）试求抛物线的表达式；

（2）P 是抛物线上一点，过点 P 作 l 的垂线，垂足为 D，E 是 l 上的点，要使以 P、D、E 为顶点的三角形与△AOC 全等，求满足条件的点 P、E 的坐标.

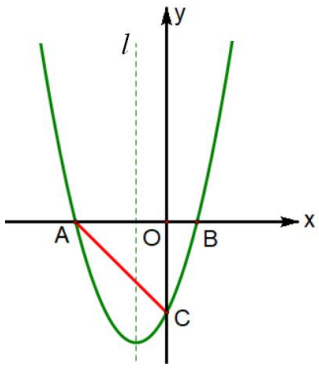


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“20 陕西 24”，拖动正方形 $PEP'E'$的中心 D 在抛物线的对称轴上运动，可以体验到，两个点 P 的横坐标是确定的.

思路点拨

1．△AOC 是腰长为 3 等腰直角三角形，所以△DEP 也是腰长为 3 的等腰直角三角形.

2．以 D 为中心画一个对角线为 6 的正方形，一条对角线在抛物线的对称轴上，这条对角线的两个端点就是两个点 E，另一条对角线的两个端点就是两个点 P.

满分解答

（1）将(3, 12)、(−4,−3)两点分别代入 $y=x^2+bx+c$，得 $\begin{cases}9+3b+c=12,\\4-2b+c=-3.\end{cases}$

解得 $b=2$，$c=-3$．所以 $y=x^2+2x-3$.

（2）由 $y=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$，

得 $A(-3, 0)$，$C(0,-3)$，对称轴是直线 $x=-1$.

所以△AOC 是腰长为 3 的等腰直角三角形.

如果△PDE 与△AOC 全等，那么 $DP=3$.

因为点 D 的横坐标为−1，所以点 P 的横坐标为 2 或−4.

当 $x=2$ 时，$y=(x+3)(x-1)=5$.

所以点 P 的坐标为(2, 5)或(−4, 5).

所以 $D(-1, 5)$.

将点 D 向上平移 3 个单位得 $E(-1, 8)$；

将点 D 向下平移 3 个单位得 $E'(-1, 2)$.

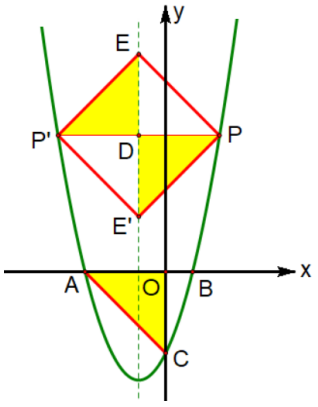


图 2

考点伸展

第（2）题的解题过程中，把主动点 P 和从动点 D 互换，把点 D 看作主动点，点 P 的横坐标就轻松搞定.