例　　2020 年聊城市中考第 25 题

如图 1，二次函数 $y=ax^2+bx+4$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$、$B(4, 0)$，与 y 轴交于点 C，抛物线的顶点为 D，其对称轴与线段 BC 交于点 E，垂直于 x 轴的动直线 l 分别交抛物线和线段 BC 于点 P 和点 F，动直线 l 在抛物线的对称轴的右侧（不含对称轴）沿 x 轴正方向移动到 B 点．

（1）求出二次函数 $y=ax^2+bx+4$ 和 BC 所在直线的表达式；

（2）在动直线 l 移动的过程中，试求使四边形 $DEFP$ 为平行四边形的点 P 的坐标；

（3）连结 CP、CD，在动直线 l 移动的过程中，抛物线上是否存在点 P，使得以点 P、C、F 为顶点的三角形与 $\triangle DCE$ 相似，如果存在，求出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由．

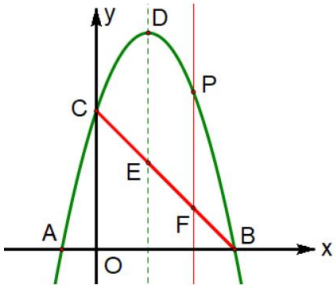


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“20 聊城 25”，拖动点 F 在线段 EB 上运动，可以体验到，有一个时刻，四边形 $DEFP$ 是平行四边形．点击屏幕左下方的按钮“第（3）题”，拖动点 F 运动，可以体验到，有一个时刻，$\triangle FCP$ 与 $\triangle ECD$ 相似．

思路点拨

1．图形中 A、B、C、D、E 五个点是确定的，把坐标和线段长都标记出来．

2．第（2）题根据 $PF=DE$ 列方程．

3．第（3）题中的两个三角形有一组角是同位角相等，根据夹角的两边对应成比例，分两种情况列方程．

满分解答

（1）因为抛物线与 x 轴交于 $A(-1, 0)$、$B(4, 0)$两点，所以 $y=a(x+1)(x-4)$．

对照 $y=ax^2+bx+4$，根据常数项相等，得 $-4a=4$．所以 $a=-1$．

所以抛物线的表达式为 $y=-(x+1)(x-4)=-x^2+3x+4$．所以 $C(0, 4)$．

由 $B(4, 0)$、$C(0, 4)$，得直线 BC 的表达式为 $y=-x+4$．

（2）抛物线的对称轴为 $x=\frac{3}{2}$，所以 $D(\frac{3}{2},\frac{25}{4})$，$E(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$．所以 $DE=\frac{15}{4}$．

如图 2，设 $P(x, -x^2+3x+4)$，$F(x,-x+4)$．

所以 $PF=(-x^2+3x+4)-(-x+4)=-x^2+4x$．

如果四边形 $DEFP$ 是平行四边形，那么 $PF=DE$．

所以 $-x^2+4x=\frac{15}{4}$．

解得 $x=\frac{5}{2}$，或 $x=\frac{3}{2}$（P、D 重合，舍去）．

所以 $P(\frac{5}{2},\frac{21}{4})$（如图 2 所示）．

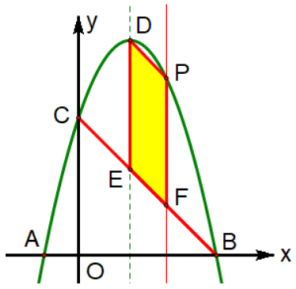


图 2

（3）如图 3，设 $P(x, -x^2+3x+4)$，$F(x,-x+4)$，所以 $FP=-x^2+4x$．

在△FCP 中，$\angle CFP=45^\circ$，$FC=\sqrt{2}x$．

如图 4，在△ECD，$\angle CED=45^\circ$，$EC=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，$DE=\frac{15}{4}$．所以 $\frac{EC}{ED}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$．

在△ECD 与△FCP 中，$\angle CED=\angle CFP$，分两种情况讨论相似．

①当 $\frac{FP}{FC}=\frac{EC}{ED}$ 时，$\frac{-x^2+4x}{\sqrt{2}x}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$．解得 $x=\frac{16}{5}$．

此时 $y_P=-(x+1)(x-4)=-\frac{21}{5}\times(-\frac{4}{5})=\frac{84}{25}$．所以 $P(\frac{16}{5},\frac{84}{25})$（如图 5 所示）．

②当 $\frac{FP}{FC}=\frac{ED}{EC}$ 时，$\frac{-x^2+4x}{\sqrt{2}x}=\frac{5}{2\sqrt{2}}$．解得 $x=\frac{3}{2}$（P、D 重合，舍去）．

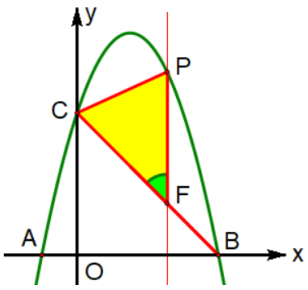


图 3

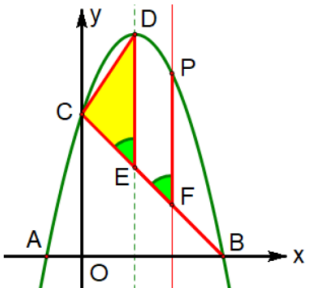


图 4

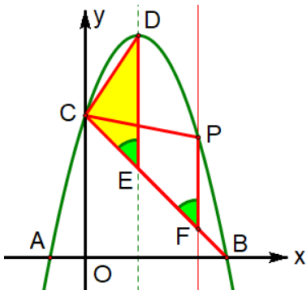


图 5

考点伸展

第（2）题如果修改为动直线 l 与 x 轴垂直，直线 l 与抛物线和直线 BC 分别交于点 P、F，以 D、E、F、P 为顶点的四边形是平行四边形，那么存在三个点 P．

因为 DE 与 PF 始终是平行的，因此 $PF=DE$ 存在两种情况．

①点 P 在点 F 的上方，上面第（2）题已经解过了．

②点 P 在点 F 的下方，那么 $-(-x^2+4x)=\frac{15}{4}$．

解得 $x=\frac{4+\sqrt{31}}{2}$（如图 6 所示），或 $x=\frac{4-\sqrt{31}}{2}$（如图 7 所示）．

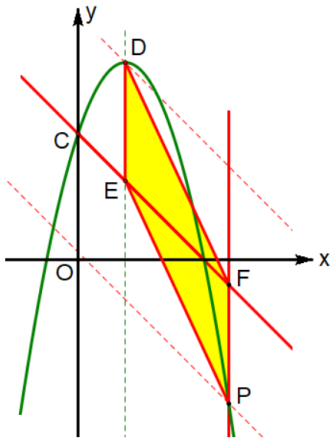


图 6

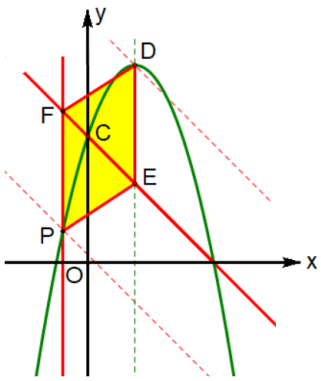


图 7