例　　2020 年连云港市中考第 26 题

在平面直角坐标系 xOy 中，把与 x 轴交点相同的二次函数图像称为“共根抛物线”．如图 1，抛物线 L_1：$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$ 的顶点为 D，交 x 轴于点 A、B（点 A 在点 B 左侧），交 y 轴于点 C．抛物线 L_2 与 L_1 是“共根抛物线”，其顶点为 P．

（1）若抛物线 L_2 经过点$(2,-12)$，求 L_2 对应的函数表达式；

（2）当 $BP-CP$ 的值最大时，求点 P 的坐标；

（3）设点 Q 是抛物线 L_1 上的一个动点，且位于其对称轴的右侧．若△DPQ 与△ABC 相似，求其“共根抛物线”L_2 的顶点 P 的坐标．

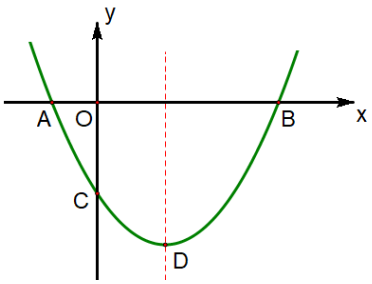
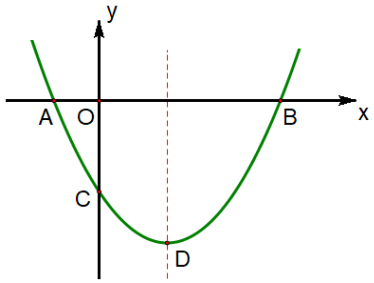


图 1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“20 连云港 26”，拖动点 P 在对称轴上运动，可以体验到，两条抛物线都与 x 轴交于 A、B 两点．点击屏幕左下方的按钮“第（2）题”，拖动点 P 在对称轴上运动，可以体验到，当点 P 落在 AC 的延长线上时，$PA-PC$ 最大；点击屏幕左下方的按钮“第（3）题”，拖动点 P 在对称轴上运动，可以体验到，四个点 Q 各有一次机会落在抛物线上．

思路点拨

1．第（1）题设两点式求解最简便．

2．第（2）题求两条线段差的最大值，先要将两条线段转化到直线同侧，再根据三角形的两边之差小于第三边求解．

3．第（3）题因为△ABC 是确定的，如果△DPQ 与△ABC 相似，那么△DPQ 是直角边之比为 1∶2 的直角三角形，存在四种情况．

满分解答

（1）由 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2=\frac{1}{2}(x+1)(x-4)$，可知 $A(-1,0)$、$B(4,0)$、$C(0,-2)$．

设抛物线 L_2 的交点式为 $y=a(x+1)(x-4)$．

代入$(2,-12)$，得 $-6a=12$．解得 $a=-2$．

所以抛物线 L_2 的函数表达式为 $y=-2(x+1)(x-4)=-2x^2+6x+16$．

（2）如图 2，连结 AP、BP，那么 $BP=AP$．所以 $BP-CP=AP-CP$．

在△APC 中，由两边之差小于第三边，得 $AP-CP<AC$．当点 P 落在 AC 的延长线上时，$AP-CP$ 的值最大（如图 3 所示），此时 $AP-CP=AC$．

如图 3，设抛物线的对称轴 $x=\frac{3}{2}$ 与 x 轴相交于点 H．

因为 $HP//OC$，所以 $\frac{HP}{OC}=\frac{AH}{AO}$．所以 $\frac{HP}{2}=\frac{5}{2}$．解得 $HP=5$．所以 $P(\frac{3}{2},-5)$.

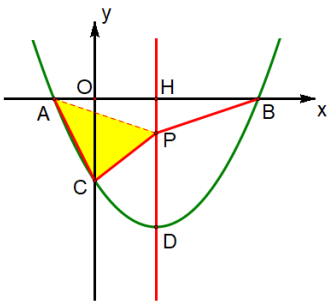


图 2

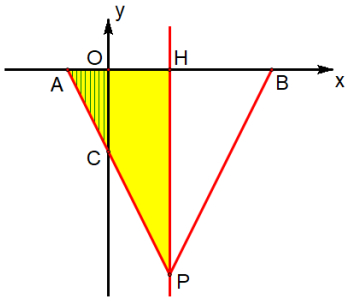


图 3

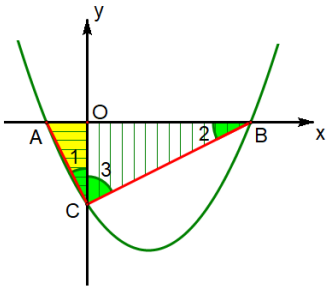


图 4

（3）由 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2=\frac{1}{2}(x-\frac{3}{2})^2-\frac{25}{8}$，得顶点 $D(\frac{3}{2},-\frac{25}{8})$.

如图 4，因为 $\tan\angle 1=\frac{OA}{OC}=\frac{1}{2}$，$\tan\angle 2=\frac{OC}{OB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，所以 $\angle 1=\angle 2$.

又因为 $\angle 2+\angle 3=90°$，所以 $\angle 1+\angle 3=90°$．

所以 $\angle ACB=90°$，$\triangle ABC$ 是直角三角形，直角边的比为 1∶2.

如果 $\triangle DPQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似，那么 $\triangle DPQ$ 也是直角三角形，直角边的比为 1∶2.

设点 Q 到对称轴 $x=\frac{3}{2}$ 的距离为 $2m$.

已知 DP 在对称轴上，以 DP 为分类标准，分两种情况讨论.

①如果 DP 为直角边，又分两种情况：

（i）如图 5，$QP=2m$，$DP=m$．此时 $Q(\frac{3}{2}+2m,-\frac{25}{8}+m)$.

将点 Q 代入 $y=\frac{1}{2}(x+1)(x-4)$，得 $-\frac{25}{8}+m=\frac{1}{2}(2m+\frac{5}{2})(2m-\frac{5}{2})$.

整理，得 $2m^2-m=0$．解得 $m_1=0$（舍去），$m_2=\frac{1}{2}$．所以 $P(\frac{3}{2},-\frac{21}{8})$.

（ii）如图 6，$QP=2m$，$DP=4m$．此时 $Q(\frac{3}{2}+2m,-\frac{25}{8}+4m)$.

将点 Q 代入 $y=\frac{1}{2}(x+1)(x-4)$，得 $-\frac{25}{8}+4m=\frac{1}{2}(2m+\frac{5}{2})(2m-\frac{5}{2})$.

整理，得 $m^2-2m=0$．解得 $m_1=0$（舍去），$m_2=2$．所以 $P(\frac{3}{2},\frac{39}{8})$.

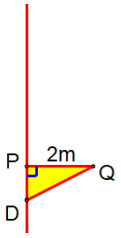


图 5

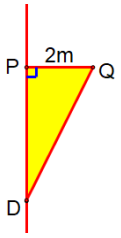


图 6

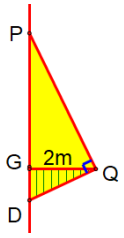


图 7

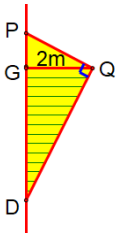


图 8

②如果 DP 为斜边，作 $QG\perp PD$ 于 G．又分两种情况：.

（iii）如图 7，$QG=2m$，$DG=m$，$PG=4m$.

此时点 $Q(\frac{3}{2}+2m,-\frac{25}{8}+m)$与情形（i）中的点 Q 一致，所以 $m=\frac{1}{2}$.

所以 $5m=\frac{5}{2}$．将点 $D(\frac{3}{2},-\frac{25}{8})$向上平移 $\frac{5}{2}$ 个单位，得 $P(\frac{3}{2},-\frac{5}{8})$.

（iv）如图 8，$QG=2m$，$DG=4m$，$PG=m$.

此时点 $Q(\frac{3}{2}+2m,-\frac{25}{8}+4m)$与情形（ii）中的点 Q 一致，所以 $m=2$.

所以 $5m=10$．将点 $D(\frac{3}{2},-\frac{25}{8})$向上平移 10 个单位，得 $P(\frac{3}{2},\frac{55}{8})$.

考点伸展

第（3）题中点 P 与点 Q 的位置如图 9、图 10、图 11、图 12 所示.

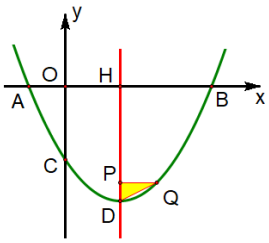


图 9

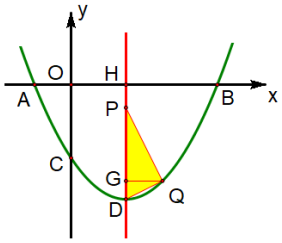


图 10

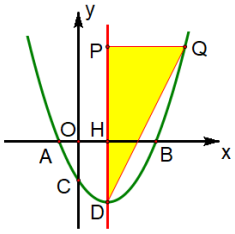


图 11

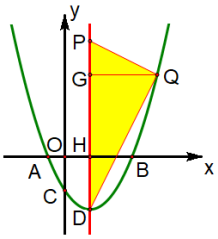


图 12