## 例　　2020 年广东省中考第 25 题

如图 1，抛物线 $y=\frac{3+\sqrt{3}}{6}x^2+bx+c$ 与 $x$ 轴交于 $A$、$B$ 两点，点 $A$、$B$ 分别位于原点的左、右两侧，$BO=3AO=3$，过点 $B$ 的直线与 $y$ 轴正半轴和抛物线的交点分别为 $C$、$D$，$BC=\sqrt{3}CD$.

（1）求 $b$、$c$ 的值；

（2）求直线 $BD$ 的函数解析式；

（3）点 $P$ 在抛物线的对称轴上且在 $x$ 轴的下方，点 $Q$ 在射线 $BA$ 上．当△$ABD$ 与△$BPQ$ 相似时，请直接写出所有满足条件的点 $Q$ 的坐标.

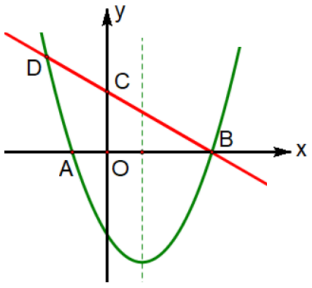



图 1

### 动感体验

请打开几何画板文件名“20 广东 25”，可以体验到，△$ABC$ 是直角三角形，$AC$ 是△$ABD$ 的高，$\angle B=30°$，$\angle D=45°$．顺次点击屏幕左下方的按钮“第（3）题—1”，“第（3）题—2”，“第（3）题—3”，“第（3）题—4”，可以体验到，△$BPQ$ 存在四种情况.

### 思路点拨

1．奇奇怪怪的数字，是为后续计算凑数．这个题目离不开二次根式的计算.

2．$A$、$B$、$C$、$D$ 四个点的坐标隐含着第（3）题的条件，△$ABD$ 的两个锐角是特殊的.

### 满分解答

（1）由点 $A$、$B$ 分别位于原点的左、右两侧，$BO=3AO=3$，得 $B(3,0)$，$A(-1,0)$.

因为抛物线与 $x$ 轴交于 $A$、$B$ 两点，所以 $y=\frac{3+\sqrt{3}}{6}(x+1)(x-3)=\frac{3+\sqrt{3}}{6}(x^2-2x-3)$.

所以 $b=-\frac{3+\sqrt{3}}{3}$，$c=-\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

（2）如图 2，作 $DF\perp x$ 轴于 $F$．由 $\frac{BO}{OF}=\frac{BC}{CD}=\sqrt{3}$，得 $OF=\sqrt{3}$.

当 $x_D=-\sqrt{3}$ 时，$y_D=\frac{3+\sqrt{3}}{6}(-\sqrt{3}+1)(-\sqrt{3}-3)=\sqrt{3}+1$.

设直线 $BD$ 的解析式为 $y=kx+n$，分别代入 $B$、$D$ 两点，得 $\begin{cases}-\sqrt{3}k+n=\sqrt{3}+1,\\3k+n=0.\end{cases}$

解得 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$n=\sqrt{3}$．所以直线 $BD$ 的解析式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$.

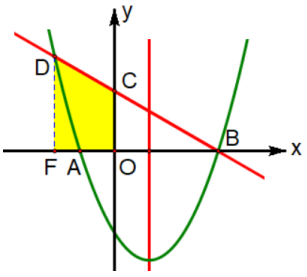



图 2

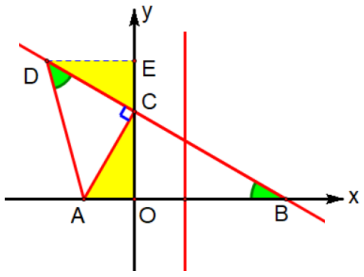



图 3

（3）点 $Q$ 的坐标为 $(1-2\sqrt{3},0)$，或 $(1-\frac{2\sqrt{3}}{3},0)$，或 $(\frac{4\sqrt{3}}{3}-1,0)$，$(5-2\sqrt{3},0)$ 或.

**考点伸展**

第（3）题的思路是这样的：

第一步，认识△$ABD$．如图 3，连结 $AC$．作 $DE\perp y$ 轴于 $E$．

由 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，$C(0,\sqrt{3})$，可得△$ABC$ 是直角三角形，$\angle ACB=90°$，$\angle B=30°$．

由 $x_D=-\sqrt{3}$，得 $DE=CO$．于是可得△$ACD$ 是等腰直角三角形，$\angle ADC=45°$．

所以 $AC$ 是钝角△$ABD$ 的高，两个锐角分别为 30° 和 45°．

第二步，分四种情况讨论△$BPQ$．

①如图 4，$PH$ 是 $BQ$ 边上的高，$\angle B=45°$，$\angle Q=30°$．$Q(1-2\sqrt{3},0)$．

②如图 5，$PH$ 是 $BQ$ 边上的高，$\angle B=30°$，$\angle Q=45°$．$Q(1-\frac{2\sqrt{3}}{3},0)$．

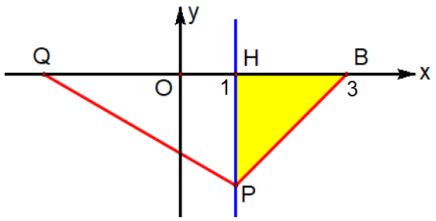



图 4

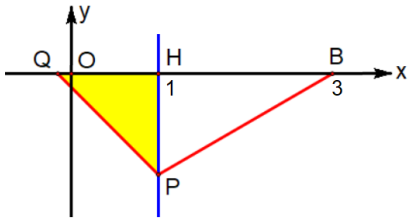



图 5

③如图 6，$QG$ 是 $BP$ 边上的高，$\angle B=30°$，$\angle P=45°$．$Q(\frac{4\sqrt{3}}{3}-1,0)$．

④如图 7，$QG$ 是 $BP$ 边上的高，$\angle B=45°$，$\angle P=30°$．$Q(5-2\sqrt{3},0)$．

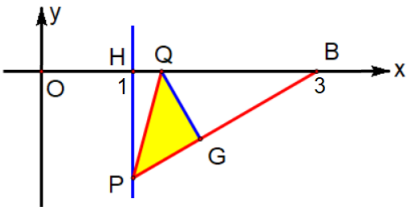



图 6

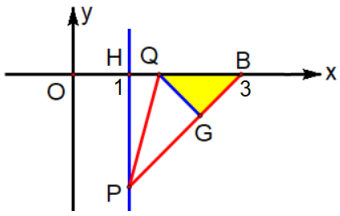



图 7