例　　2020 年鄂州市中考第 24 题

如图 1，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 左边），与 y 轴交于点 C，直线 $y=\frac{1}{2}x-2$ 经过 B、C 两点．

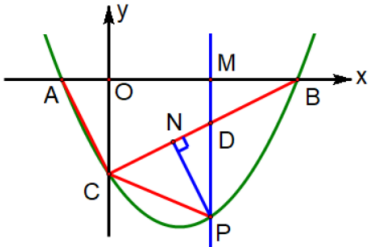


图 1

（1）求抛物线的解析式；

（2）点 P 是抛物线上的一动点，过点 P 且垂直于 x 轴的直线与直线 BC 及 x 轴分别交于点 D、M，$PN\perp BC$，垂足为 N．设 $M(m, 0)$．

①点 P 是抛物线上一点，若点 P、D、M 三点中恰有一点是其它两点所连线段的中点（三点重合除外），请直接写出符合条件的 m 的值；

②当点 P 在直线 BC 下方的抛物线上运动时，是否存在一点 P，使△PNC 与△AOC 相似，若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

动感体验

请打开几何画板文件名“20 鄂州 24”，拖动点 M 在 x 轴上运动，可以体验到，P、D、M 三点都有一次机会成为其它两点的中点．点击屏幕左下方的按钮“第（3）题”，拖动点 P 运动，可以体验到，△PNC 与△AOC 相似存在两种情况，一种情况 $CP//x$ 轴，另一张情况 P 为抛物线的顶点．

思路点拨

1．用 m 表示 P、D、M 三点的坐标，分三种情况列方程，每个点都可能是中点．

2．把△PNC 与△AOC 相似，转化为△PNC 与△PND 相似，进而转化为△PCD 是直角三角形或等腰三角形．

满分解答

（1）由 $y=\frac{1}{2}x-2$，得 $B(4, 0)$，$C(0,-2)$．

设抛物线的交点式为 $y=\frac{1}{2}(x-4)(x-x_A)$，代入点 $C(0,-2)$，得 $-2=\frac{1}{2}\times(-4)(-x_A)$．

解得 $x_A=-1$．所以抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}(x-4)(x+1)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}-2$．

（2）①P 为中点时，$m=-\frac{1}{2}$；D 为中点时，$m=1$；M 为中点时，$m=-2$．

②第一步，根据相似三角形的传递性进行转化．

如图 2，由 $A(-1, 0)$，$B(4, 0)$，$C(0,-2)$，可得 $\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{OB}$．所以△$AOC$∽△$COB$．

所以△AOC∽△COB∽△DMB∽△DNP．

如果△PNC 与△AOC 相似，那么△PNC 与△DNP 相似．

第二步，以∠CPN 为分类标准，分两种情况讨论．

①如图 3，如果∠CPN=∠NPD，那么 $CP\perp DP$．

此时 $CP//x$ 轴，P、C 两点关于抛物线的对称轴对称 $x=\frac{3}{2}$，所以 $P(3,-2)$．

②如图 4，如果∠CPN=∠DPN，那么可得 $PC=PD$．

已知 $C(0,-2)$，$P\left(m,\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}-2\right)$，$D\left(m,\frac{1}{2}m-2\right)$.

由 $PC^2=PD^2$，得 $m^2+\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}-2-(-2)\right)^2=\left[\left(\frac{1}{2}m-2\right)-\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}-2\right)\right]^2$.

整理，得一元一次方程，解得 $m=\frac{3}{2}$. 此时 P 为抛物线的顶点，$P(\frac{3}{2},-\frac{25}{8})$.

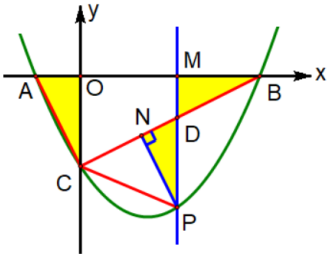


图 2

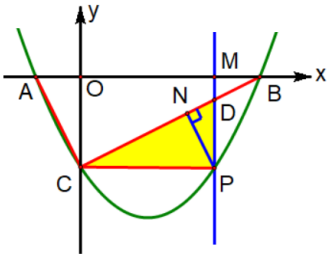


图 3

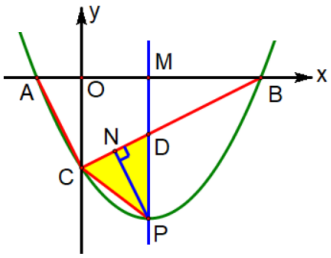


图 4

考点伸展

第（2）①题分三种情况列方程：

（i）P 为 DM 的中点，那么 $2y_P=y_D+y_M$. 所以 $2\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}-2\right)=\left(\frac{1}{2}m-2\right)+0$.

整理，得 $2m^2-7m-4=0$. 解得 $m=-\frac{1}{2}$（如图 5），或 $m=4$（与点 B 重合，舍去）.

（ii）D 为 PM 的中点，那么 $2y_D=y_P+y_M$. 所以 $2\left(\frac{1}{2}m-2\right)=\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}-2\right)+0$.

整理，得 $m^2-5m+4=0$. 解得 $m=1$（如图 6），或 $m=4$（舍去）.

（iii）M 为 PD 的中点，那么 $2y_M=y_P+y_D$. 所以 $0=\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}-2\right)+\left(\frac{1}{2}m-2\right)$.

整理，得 $m^2-2m-8=0$. 解得 $m=-2$（如图 7），或 $m=4$（舍去）.

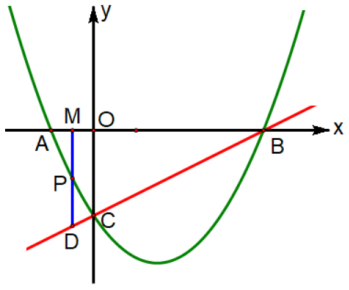


图 5

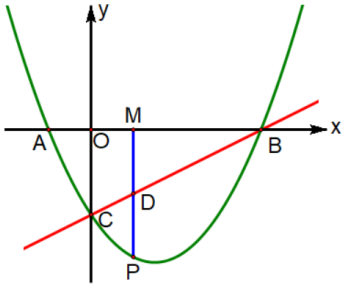


图 6

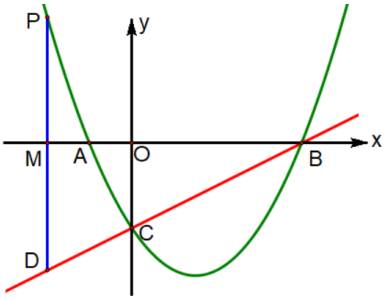


图 7