⑩（20 成都 28）在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$、$B(4, 0)$两点，与 y 轴交于点 $C(0,-2)$.

（1）求抛物线的函数表达式；

（2）如图 1，点 D 为第四象限抛物线上一点，连结 AD、BC 交于点 E，连结 BD，记 $\triangle BDE$ 的面积为 S_1，$\triangle ABE$ 的面积为 S_2，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值；

（3）如图 2，连结 AC、BC，过点 O 作直线 $l//BC$，点 P、Q 分别为直线 l 和抛物线上的点，试探究：在第一象限是否存在这样的点 P、Q，使$\triangle PQB\backsim\triangle CAB$，若存在，请求出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

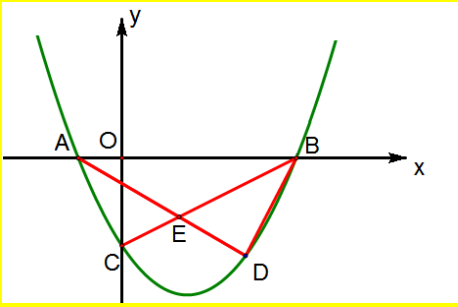


图 1

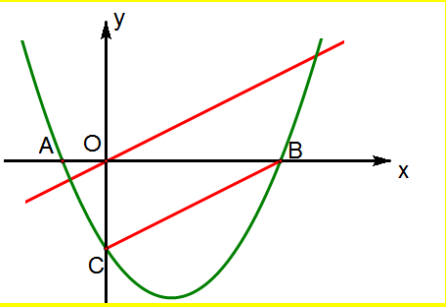


图 2

⓾（1）设抛物线的表达式为 $y=a(x+1)(x-4)$．代入点 $C(0,-2)$，得 $-4a=-2$．

解得 $a=\frac{1}{2}$．所以 $y=\frac{1}{2}(x+1)(x-4)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$．

（2）如图 1，因为△BDE 与△BAE 是同高三角形，所以面积比等于底边 DE 与 AE 的比．

如图 2，作 $DH\perp x$ 轴于 H，交 BC 于点 F，作 $AG\perp x$ 轴，交 BC 的延长线于点 G．

由 $DH//AG$，得 $\frac{DE}{AE}=\frac{DF}{AG}$．所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{DF}{AG}$．

由 $AG//OC$，得 $\frac{AG}{OC}=\frac{AB}{OB}=\frac{5}{4}$．所以 $AG=\frac{5}{4}OC=\frac{5}{4}\times 2=\frac{5}{2}$，为定值．

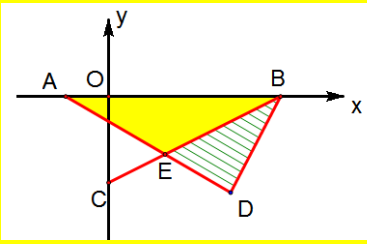
因此当 DF 取最大值时，$\frac{S_1}{S_2}$ 的值最大．

由 $B(4,0)$、$C(-2,0)$，得直线 BC 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-2$．

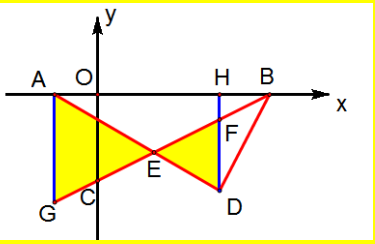
设 $D(x,\ \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2)$，$F(x,\ \frac{1}{2}x-2)$．

所以 $DF=(\frac{1}{2}x-2)-(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2)=-\frac{1}{2}x^2+2x=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$．

所以当 $x=2$ 时，DF 的最大值为 2，$\frac{S_1}{S_2}$ 的值最大值为 $\frac{4}{5}$．



第 10 题图 1



第 10 题图 2

（3）因为直线 $l//BC$，所以直线 l 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x$．设 $P(m,\ \frac{1}{2}m)$．

如果△PQB∽△CAB，那么∠QPB=∠ACB=90°，$\frac{QP}{BP}=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$．分两种情况讨论．

①如图 3，当点 P 在直线 BQ 右侧时，作 $QM//x$ 轴，作 $PN\perp x$ 轴于 N，交 QM 于 M．

由△QMP∽△PNB，得 $\frac{QM}{PN}=\frac{MP}{NB}=\frac{QP}{PB}=\frac{1}{2}$．

所以 $QM=\frac{1}{2}PN=\frac{1}{4}m$，$MP=\frac{1}{2}NB=\frac{1}{2}(m-4)$．所以 $Q(\frac{3}{4}m,\ m-2)$．

将点 $Q(\frac{3}{4}m,\ m-2)$代入 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$，得 $\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}m)^2-\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}m-2=m-2$．

整理，得 $9m^2-68m=0$．解得 $m_1=0$（舍去），$m_2=\frac{68}{9}$．所以 $P(\frac{68}{9},\frac{34}{9})$．

②如图 4，当点 P 在直线 BQ 左侧时，作 $QK//x$ 轴，作 $PL\perp x$ 轴于 L，交 QK 于 K．

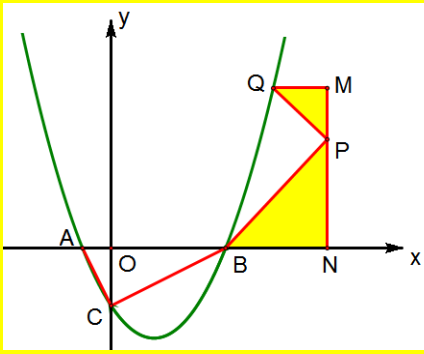
由△QKP∽△PLB，得 $\frac{QK}{PL}=\frac{KP}{LB}=\frac{QP}{PB}=\frac{1}{2}$．

所以 $QK=\frac{1}{2}PL=\frac{1}{4}m$， $KP=\frac{1}{2}LB=\frac{1}{2}(4-m)$．所以 $Q(\frac{5}{4}m,2)$.

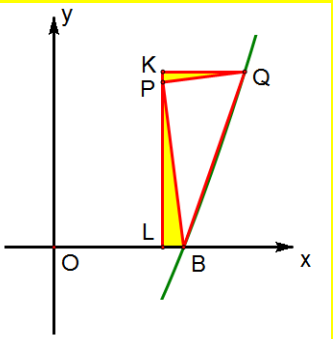
将点 $Q(\frac{5}{4}m,2)$代入 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$，得 $\frac{1}{2}\cdot(\frac{5}{4}m)^2-\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}m-2=2$．

整理，得 $25m^2-60m-128=0$．解得 $m_1=\frac{6-2\sqrt{41}}{5}$（舍去），$m_2=\frac{6+2\sqrt{41}}{5}$.

所以 $P(\frac{6+2\sqrt{41}}{5},\frac{3+\sqrt{41}}{5})$.



第 10 题图 3



第 10 题图 4