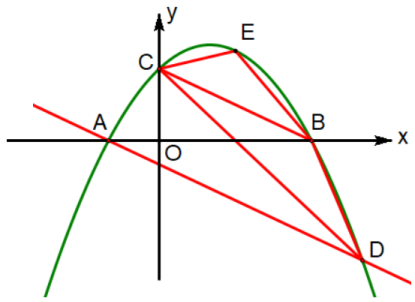
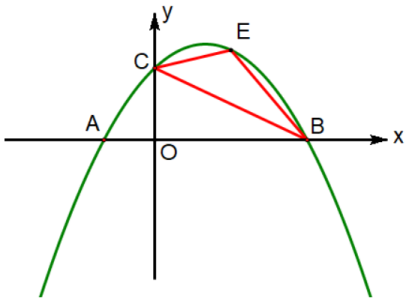
❾（20 重庆 B25）如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+2$（$a\neq0$）与 y 轴交于点 C，与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），且 A 点坐标为$(-\sqrt{2},0)$，直线 BC 的解析式为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{3}x+2$.

（1）求抛物线的解析式；

（2）过点 A 作 $AD//BC$，交抛物线于点 D，点 E 为直线 BC 上方抛物线上一动点，联结 CE、EB、BD、BC，求四边形 $BECD$ 面积的最大值及相应点 E 的坐标；

（3）将抛物线 $y=ax^2+bx+2$（$a\neq0$）向左平移 $\sqrt{2}$ 个单位，已知点 M 为抛物线 $y=ax^2+bx+2$（$a\neq0$）的对称轴上一动点，点 N 为平移后的抛物线上一动点．在（2）中，当四边形 $BECD$ 的面积最大时，是否存在以 A、E、M、N 为顶点的四边形为平行四边形，若存在，直接写出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由．





备用图

❾（1）由 $y=-\frac{\sqrt{2}}{3}x+2$，得 $B(3\sqrt{2},0)$，$C(0,2)$.

因为抛物线与 x 轴交于 $A(-\sqrt{2},0)$、$B(3\sqrt{2},0)$两点，设 $y=a(x+\sqrt{2})(x-3\sqrt{2})$.

对照 $y=ax^2+bx+2$，根据常数项相等，得 $-6a=2$.

解得 $a=-\frac{1}{3}$. 所以 $y=-\frac{1}{3}(x+\sqrt{2})(x-3\sqrt{2})=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}x+2$.

（2）第一步，求点 D 的坐标. 设 $D(m,-\frac{1}{3}(m+\sqrt{2})(m-3\sqrt{2}))$.

如图 1，作 $DH\perp x$ 轴于 H. 由 $AD//BC$，得 $\angle DAH=\angle CBO$.

由 $\tan\angle DAH=\tan\angle CBO$，得 $\frac{DH}{AH}=\frac{CO}{BO}$. 所以 $\frac{-\frac{1}{3}(m+\sqrt{2})(m-3\sqrt{2})}{m+\sqrt{2}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}$.

解得 $m=4\sqrt{2}$. 所以 $D(4\sqrt{2},-\frac{10}{3})$.

第二步，割补求四边形 $BECD$ 的面积. 如图 2，连结 OD、OE.

已知 $B(3\sqrt{2},0)$，$C(0,2)$，$D(4\sqrt{2},-\frac{10}{3})$，设 $E(x,y)$，$y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}x+2$.

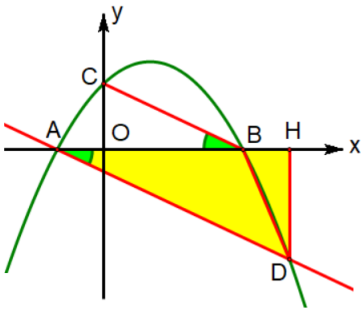
所以 $S=S_{四边形BECD}=S_{\triangle ECO}+S_{\triangle EBO}+S_{\triangle DBO}-S_{\triangle DCO}$

$$=x+\frac{3\sqrt{2}}{2}y+\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{10}{3}-4\sqrt{2}=x+\frac{3\sqrt{2}}{2}(-\frac{1}{3}x^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}x+2+\frac{10}{3})-4\sqrt{2}$$

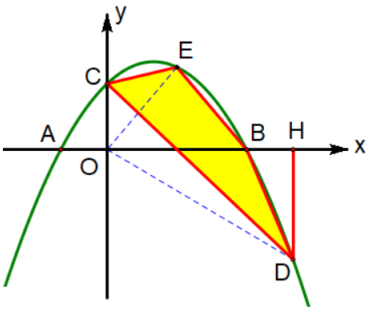
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+3x+4\sqrt{2}.$$

因此当 $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，S 取得最大值，最大值 $S=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{9}{2}+3\times\frac{3\sqrt{2}}{2}+4\sqrt{2}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$.

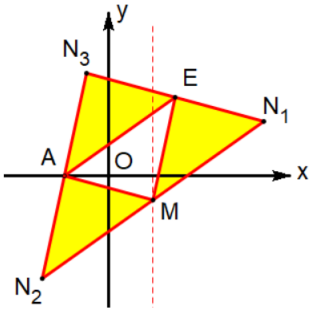
当 $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，$y=-\frac{1}{3}(x+\sqrt{2})(x-3\sqrt{2})=-\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\times(-\frac{3\sqrt{2}}{2})=\frac{5}{2}$. 此时 $E(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{5}{2})$.



第 9 题图 1



第 9 题图 2



第 9 题图 3

（3）平移后的新抛物线为 $y=-\frac{1}{3}(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=-\frac{1}{3}(x^2-8)$，点 N 在此抛物线上.

如图 3，已知 $A(-\sqrt{2},0)$、$E(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{10}{3})$，在直线 $x=\sqrt{2}$ 上虚拟一个点 M.

过△AEM 的每个顶点分别画对边的平行线，三条直线两两相交，得到三个点 N.

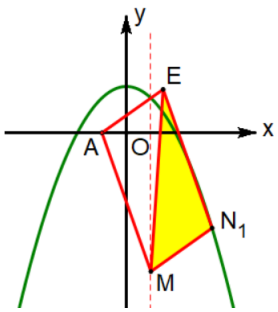
①如图 4，按照 $A\rightarrow E$ 方向平移点 M，因为 A、E 两点间的水平距离为 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$，所以点 N

的横坐标等于 $\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$．此时 $N(\frac{7\sqrt{2}}{2},-\frac{11}{2})$，如图 4 所示．

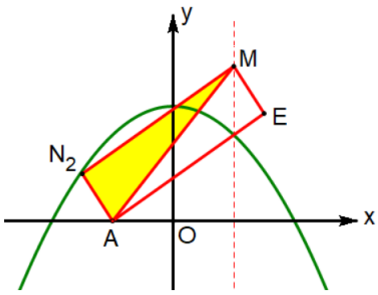
②按照 $E\rightarrow A$ 方向平移点 M，那么点 N 的横坐标等于 $\sqrt{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$．

此时 $N(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{7}{6})$，如图 5 所示．

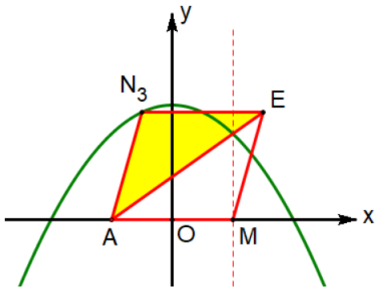
③按照 $M\rightarrow E$ 方向平移点 A，因为 M、E 两点间的水平距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以点 N 的横坐标等于 $-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$．此时 $N(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5}{2})$，如图 6 所示．



第 9 题图 4



第 9 题图 5



第 9 题图 6