例　　2020 年重庆市中考 A 卷第 25 题

如图 1，在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与直线 AB 相交于 A、B 两点，其中 $A(-3,-4)$，$B(0,-1)$.

（1）求抛物线的函数表达式；

（2）点 P 为直线 AB 下方抛物线上的任意一点，联结 PA、PB，求△PAB 面积的最大值；

（3）将该抛物线向右平移 2 个单位长度得到抛物线 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$（$a_1\neq0$），平移后的抛物线与原抛物线相交于点 C，点 D 为原抛物线对称轴上一点，在平面直角坐标系中是否存在点 E，使以点 B、C、D、E 为顶点的四边形为菱形，若存在，请直接写出点 E 的坐标；若不存在，请说明理由.

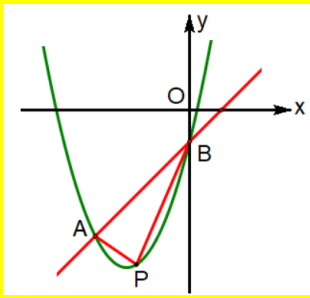
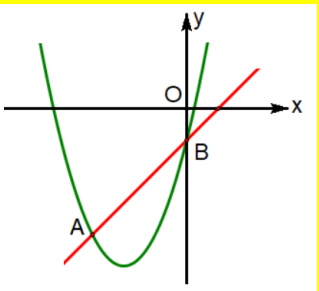


图 1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“20 重庆 A 卷 25”，拖动点 P 运动，可以体验到，当点 P 在 AB 的中点的正下方时，△PAB 的面积最大.　点击屏幕左下方的按钮“第（3）题”，可以体验到，以点 B、C、D、E 为顶点的菱形存在 4 个.

思路点拨

1．第（2）题过点 P 作 y 轴的平行线，用割补法将△PAB 的面积表示为二次函数.

2．第（3）题将菱形的存在性问题，转化为等腰三角形 BCD 的存在性问题.

满分解答

（1）将 $A(-3,-4)$、$B(0,-1)$两点分别代入 $y=x^2+bx+c$，得 $\begin{cases}9-3b+c=-4,\\ c=-1.\end{cases}$

解得 $b=4$，$c=-1$．所以抛物线的函数表达式为 $y=x^2+4x-1=(x+2)^2-5$.

（2）如图 2，由 $A(-3,-4)$、$B(0,-1)$，得直线 AB 的解析式为 $y=x-1$.

过点 P 作 y 轴的平行线交直线 AB 于点 M．设 $P(x, x^2+4x-1)$，$M(x, x-1)$.

所以 $S=S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAM}+S_{\triangle PBM}=\frac{1}{2}(y_M-y_P)(x_B-x_A)$

$$=\frac{3}{2}\left[(x-1)-(x^2+4x-1)\right]=-\frac{3}{2}(x^2+3x).$$

当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，S 取得最大值，

最大值 $S=-\frac{3}{2}(x^2+3x)=-\frac{3}{2}\times(\frac{9}{4}-\frac{9}{2})=\frac{27}{8}$.

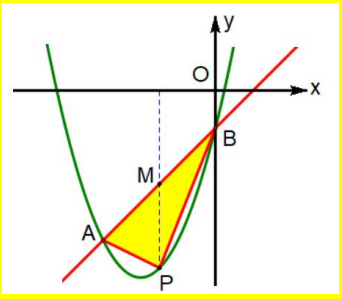


图 2

（3）点 E 的坐标为 $(-3,-4+\sqrt{6})$，$(-3,-4-\sqrt{6})$，$(-1,2)$或$(1,-3)$.

考点伸展

第（3）题的解题思路是这样的：

原抛物线的顶点$(-2,-5)$向右平移 2 个单位长度，得到新抛物线的顶点为$(0,-5)$.

所以新抛物线的解析式为 $y=x^2-5$.

联立 $y=x^2+4x-1$ 和 $y=x^2-5$，解得 $C(-1,-4)$.

已知 $B(0,-1)$、$C(-1,-4)$，设 $D(-2,y)$.

如果以点 B、C、D、E 为顶点的四边形为菱形，那么△BCD 为等腰三角形．分三种情况讨论：

①如果 $BD=BC$，由 $BD^2=BC^2=10$，得 $2^2+(y+1)^2=10$．解得 $y=-1\pm\sqrt{6}$.

将点 $D(-2,-1+\sqrt{6})$ 沿 $B\to C$ 方向，先向左平移 1 个单位，再向下平移 3 个单位，得 $E(-3,-4+\sqrt{6})$（如图 3 中的点 E）.

将点 $D'(-2,-1-\sqrt{6})$ 沿 $B\to C$ 方向平移，得 $E'(-3,-4-\sqrt{6})$（如图 3 中的点 E'）.

②如果 $CD=CB$，由 $CD^2=CB^2=10$，得 $1^2+(y+4)^2=10$．解得 $y=-1$，或 $y=-7$.

如图 4，当 $D(-2,-1)$时，$DB//x$ 轴．此时 E、C 两点关于直线 $y=-1$ 对称，$E(-1,2)$.

当 $D(-2,-7)$时，B、C、D 三点共线，△BCD 不存在.

③如果 $DC=DB$，由 $DC^2=DB^2$，得 $1^2+(y+4)^2=2^2+(y+1)^2$．解得 $y=-2$.

因此 $DC^2=DB^2=5$．所以 $DC^2+DB^2=BC^2$．所以△BCD 是等腰直角三角形.

所以四边形 $BCDE$ 是正方形（如图 5）．作正方形 $BCDE$ 的外接正方形（勾股图），使得边与坐标轴平行．可知 4 个直角三角形的直角边是 1 和 2，所以 $E(1,-3)$.

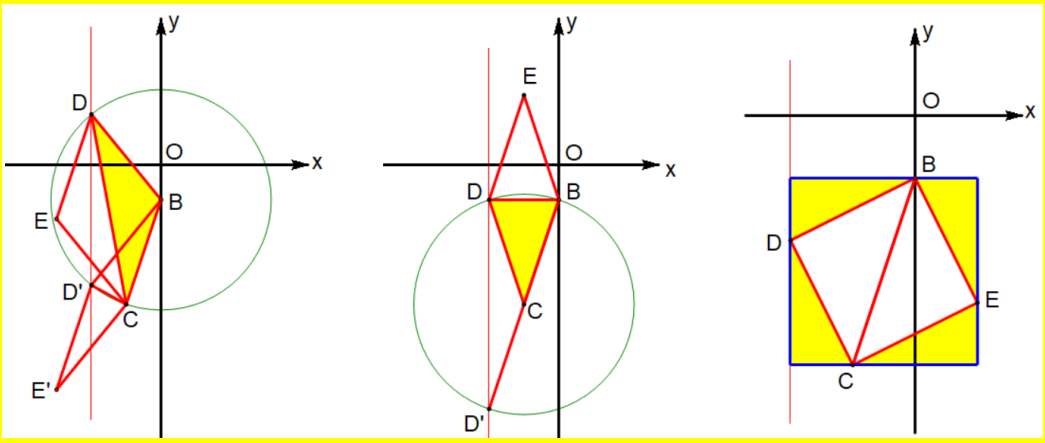


图 3　　图 4　　图 5