例　　2020年青海省中考第28题

如图1所示，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 经过 B、D 两点，与 x 轴的另一个交点为 A，与 y 轴相交于点 C.

（1）求抛物线的解析式；

（2）设抛物线的顶点为 M，求四边形 $ABMC$ 的面积；

（3）设点 Q 在 y 轴上，点 P 在抛物线上，要使以点 A、B、P、Q 为顶点的四边形是平行四边形，求所有满足条件的点 P 的坐标.

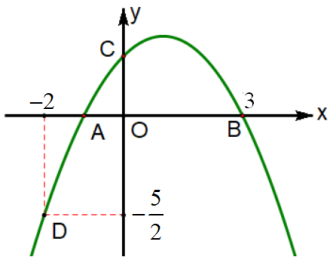


图1

动感体验

请打开几何画板文件名“20青海28”，拖动点 Q 在 y 轴上运动，可以体验到，三个点 P 各有一次机会落在抛物线上．还可以体验到，对每一个点 P 而言，横坐标是确定的.

思路点拨

1．第（2）题连结 OM，把四边形 $ABMC$ 分割为三个三角形.

2．第（3）题以 AB 为分类标准，按照边或对角线分两种情况讨论.

满分解答

（1）因为抛物线与 x 轴交于 A、$B(3,0)$两点，设 $y=-\frac{1}{2}(x-3)(x-x_A)$.

代入点 $D(-2,-\frac{5}{2})$，得 $-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}\times(-5)\times(-2-x_A)$ ．解得 $x_A=-1$.

所以 $y=-\frac{1}{2}(x-3)(x+1)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ ．顶点 M 为$(1,2)$.

（2）如图2，已知 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，$C(0,\frac{3}{2})$，$M(1,2)$，连结 OM.

所以 $S_{四边形ABMC}=S_{\triangle ACO}+S_{\triangle MCO}+S_{\triangle MBO}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times1+\frac{1}{2}\times3\times2=\frac{9}{2}$.

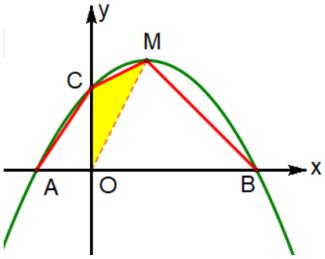


图2

（3）设 $P(x,-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2})$．以 AB 为分类标准，分两种情况讨论：

①如果 AB 是平行四边形的边，那么 $PQ//AB$，$PQ=AB=4$．

所以点 P 的横坐标为 4 或－4．

所以 $P(4,-\frac{5}{2})$（如图 3 所示），或 $(-4,-\frac{21}{2})$（如图 4 所示）．

②如果 AB 是平行四边形的对角线，那么对角线的交点为(1, 0)．

所以 P、Q 两点在直线 $x=1$ 的两侧，到直线 $x=1$ 的距离相等．

所以点 P 的横坐标为 2．此时 $P(2,\frac{3}{2})$（如图 5 所示）．

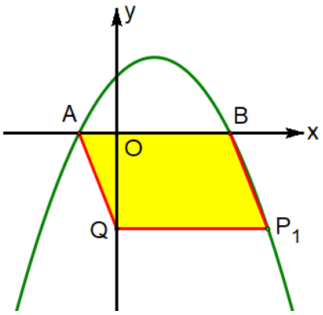


图 3

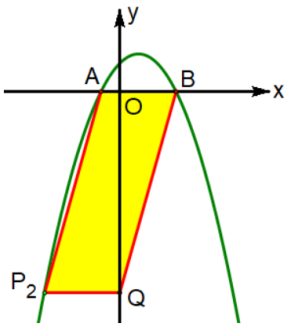


图 4

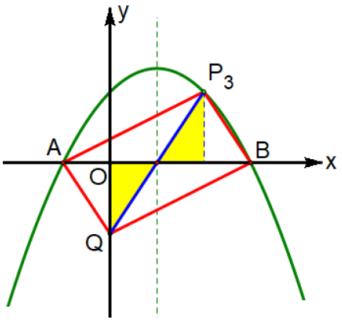


图 5

考点伸展

第（3）题还可以这样思考：

如图 6 所示，在 y 轴上虚拟一个点 Q，过△QAB 的每一个顶点画对边的平行线，三条直线两两相交，得到三个点 P．已知 Q、A、B 三点的横坐标，就可以得到三个点 P 的横坐标．然后代入求值得到点 P 的纵坐标．

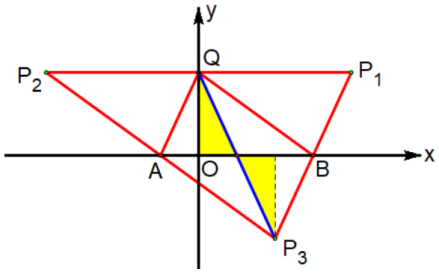


图 6