例　　2020 年齐齐哈尔市中考第 24 题

在平面直角坐标系中，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 经过点 $A(-4,0)$，点 M 为抛物线的顶点，点 B 在 y 轴上，且 $OA=OB$，直线 AB 与抛物线在第一象限交于点 $C(2,6)$，如图 1．

（1）求抛物线的解析式；

（2）直线 AB 的解析式为_____，点 M 的坐标为_____，$\cos\angle ABO=$_____；

连结 OC，若过点 O 的直线交线段 AC 于点 P，将△AOC 的面积分成 1∶2 的两部分，则点 P 的坐标为_____；

（3）在 y 轴上找一点 Q，使得△AMQ 的周长最小．具体作法如图 2，作点 A 关于 y 轴的对称点 A'，连结 MA' 交 y 轴于点 Q，连结 AM、AQ，此时△AMQ 的周长最小．请求出点 Q 的坐标；

（4）在坐标平面内是否存在点 N，使以点 A、O、C、N 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请直接写出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由．

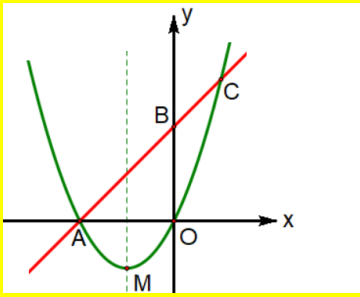


图 1

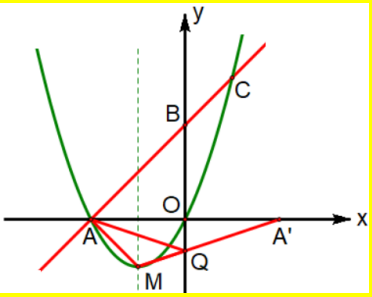


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“20 齐齐哈尔 24”，可以体验到，△AOC 是△$N_1N_2N_3$ 的中点三角形．

思路点拨

1．点 P 是线段 AC 的三等分点，其中一个点 P 与点 B 重合．

2．A、O、C 三点是确定的，过△AOC 的每个顶点画对边的平行线，三条直线两两相交，就得到三个点 N．

满分解答

（1）设抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}(x+4)(x-x_2)$，代入 $C(2,6)$，得 $6=\frac{1}{2}\times6\times(2-x_2)$．

解得 $x_2=0$．所以 $y=\frac{1}{2}x(x+4)=\frac{1}{2}x^2+2x$．

（2）如图 3，直线 AB 的解析式为 $y=x+4$，$M(-2,-2)$，$\cos\angle ABO=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

点 P 是线段 AC 的三等分点，其中点 B 是一个三等分点，另一个是 AB 的中点．

点 P 的坐标为(0, 4)，或(−2, 2).

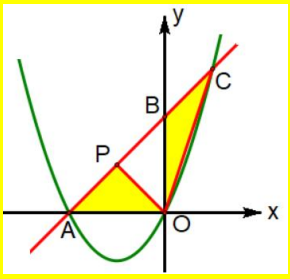


图 3

（3）如图 4，设抛物线的对称轴 $x=-2$ 与 x 轴交于点 H.

由 $\frac{QO}{MH}=\frac{A'O}{A'H}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，得 $QO=\frac{2}{3}MH=\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}$．所以 $Q\left(0,-\frac{4}{3}\right)$.

（4）点 N 的坐标为(6, 6)，(−2, 6)或(−6,−6).

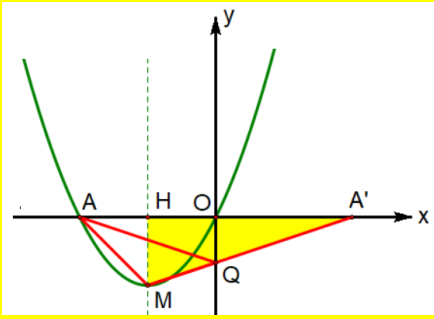


图 4

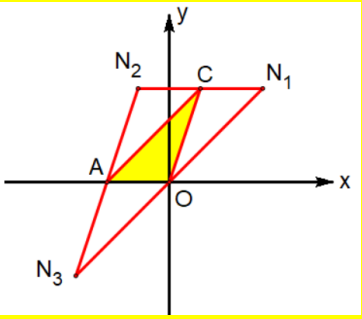


图 5

考点伸展

第（4）题可以用坐标平移来解．如图 5，已知 $A(-4, 0)$、$O(0, 0)$、$C(2, 6)$，过△AOC 的每个顶点画对边的平行线，三条直线两两相交，得三个点 N.

沿 $A\rightarrow O$ 方向平移点 $C(2, 6)$，向右平移 4 个单位，得 $N_1(6, 6)$.

沿 $O\rightarrow A$ 方向平移点 $C(2, 6)$，向左平移 4 个单位，得 $N_2(-2, 6)$.

沿 $C(2, 6)\rightarrow O$ 方向平移点 $A(-4, 0)$，先向左平移 2 个单位，再向下平移 6 个单位，得 $N_3(-6,-6)$.