例　　2020 年绵阳市中考第 24 题

如图 1，抛物线过点 $A(0, 1)$和点 C，顶点为 D，直线 AC 与抛物线的对称轴 BD 的交点为 $B(\sqrt{3}, 0)$．平行于 y 轴的直线 EF 与抛物线交与点 E，与直线 AC 交于点 F，点 F 的横坐标为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，四边形 $BDEF$ 为平行四边形．

（1）求点 F 的坐标及抛物线的解析式；

（2）若点 P 为抛物线上的动点，且在直线 AC 上方，当△PAB 面积最大时，求点 P 的坐标及△PAB 面积的最大值；

（3）在抛物线的对称轴上取一点 Q，同时在抛物线上取一点 R，使以 AC 为一边且以 A、C、Q、R 为顶点的四边形为平行四边形，求点 Q 和点 R 的坐标．

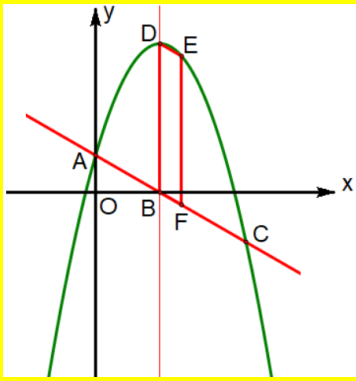
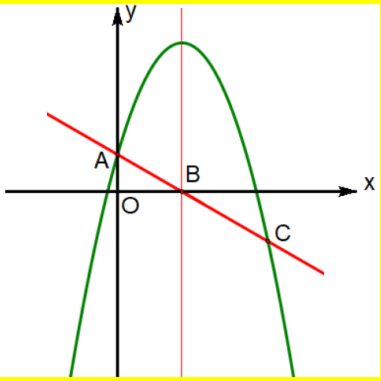


图 1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“20 绵阳 24”，拖动点 P 在 AC 上方的抛物线上运动，可以体验到，当点 P 在 AC 的中点的正上方时，△PAB 的面积最大．点击屏幕左下方的按钮“第（3）题”，拖动点 Q 在抛物线的对称轴上运动，可以体验到，三个点 R 各有一次机会落在抛物线上，其中两个点 R 是以 AC 为边的平行四边形的顶点，一个点 R 是以 AC 为对角线的平行四边形的顶点．

思路点拨

1．由 A、B 两点求得直线 AB 的解析式，得到点 F 的坐标．

2．设抛物线的顶点 D 的纵坐标为 n，由 BF 方向平移点 D，可用 n 表示点 E 的纵坐标．

3．连结 OP，用割补法表示△PAB 的面积．

4．第（3）题中，Q、R 两点间的水平距离、竖直距离分别等于 A、C 两点间的水平距离、竖直距离．

图文解析

（1）由 $A(0, 1)$、$B(\sqrt{3}, 0)$，得直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$．所以 $F(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{3})$．

设顶点 $D(\sqrt{3}, n)$，那么抛物线的解析式为 $y=a(x-\sqrt{3})^2+n$．

如图 2，因为 DB 与 EF 平行且相等，所以 $E(\frac{4\sqrt{3}}{3},n-\frac{1}{3})$.

将 $A(0,1)$、$E(\frac{4\sqrt{3}}{3},n-\frac{1}{3})$ 两点分别代入 $y=a(x-\sqrt{3})^2+n$，得 $\begin{cases}3a+n=1,\\ \frac{1}{3}a+n=n-\frac{1}{3}.\end{cases}$

解得 $a=-1$，$n=4$．所以 $y=-(x-\sqrt{3})^2+4=-x^2+2\sqrt{3}x+1$.

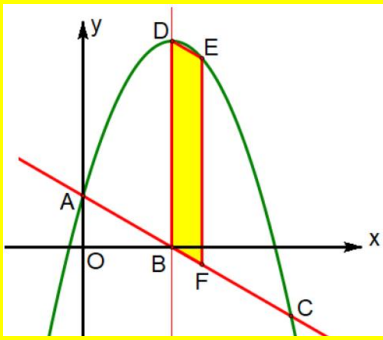


图 2

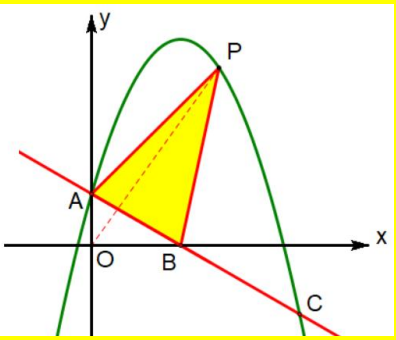


图 3

（2）如图 3，连结 OP．设 $P(x,y)$，$y=-x^2+2\sqrt{3}x+1$.

所以 $S=S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAO}+S_{\triangle PBO}-S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}(-x^2+2\sqrt{3}x+1)-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{7}{2}x$.

当 $x=\frac{7\sqrt{3}}{6}$ 时，S 取得最大值，最大值等于 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{7\sqrt{3}}{6}\right)^2+\frac{7}{2}\times\frac{7\sqrt{3}}{6}=\frac{49\sqrt{3}}{24}$.

当 $x=\frac{7\sqrt{3}}{6}$ 时，$y=-(x-\sqrt{3})^2+4=-(\frac{7\sqrt{3}}{6}-\sqrt{3})^2+4=\frac{47}{12}$．所以 $P(\frac{7\sqrt{3}}{6},\frac{47}{12})$.

（3）联立 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 和 $y=-x^2+2\sqrt{3}x+1$，解得 $x_A=0$，$x_C=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

所以 $C(\frac{7\sqrt{3}}{3},-\frac{4}{3})$．所以 A、C 两点间的水平距离为 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$，竖直距离为 $\frac{7}{3}$.

如图 4，在抛物线的对称轴上虚拟一个点 Q，过△QAC 的每个顶点画对边的平行线，三条直线两两相交得到三个点 R.

如果 AC 为平行四边形的边，那么 $QR//AC$，$QR=AC$.

所以 Q、R 两点间的水平距离为 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$，竖直距离为 $\frac{7}{3}$.

因为点 Q 的横坐标为 $\sqrt{3}$，所以点 R 的横坐标为 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 或 $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

如图 5，当 $x_R=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 时，$y_R=-(x-\sqrt{3})^2+4=-(\frac{10\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3})^2+4=-\frac{37}{3}$.

由 $-\frac{37}{3}+\frac{7}{3}=-10$，得 $Q(\sqrt{3},-10)$. 对应的点 R 为 $(\frac{10\sqrt{3}}{3},-\frac{37}{3})$.

如图 6，当 $x_R=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，$y_R=-(x-\sqrt{3})^2+4=-(-\frac{4\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3})^2+4=-\frac{37}{3}$.

由 $-\frac{37}{3}-\frac{7}{3}=-\frac{44}{3}$，得 $Q(\sqrt{3},-\frac{44}{3})$. 对应的点 R 为 $(-\frac{4\sqrt{3}}{3},-\frac{37}{3})$. ，

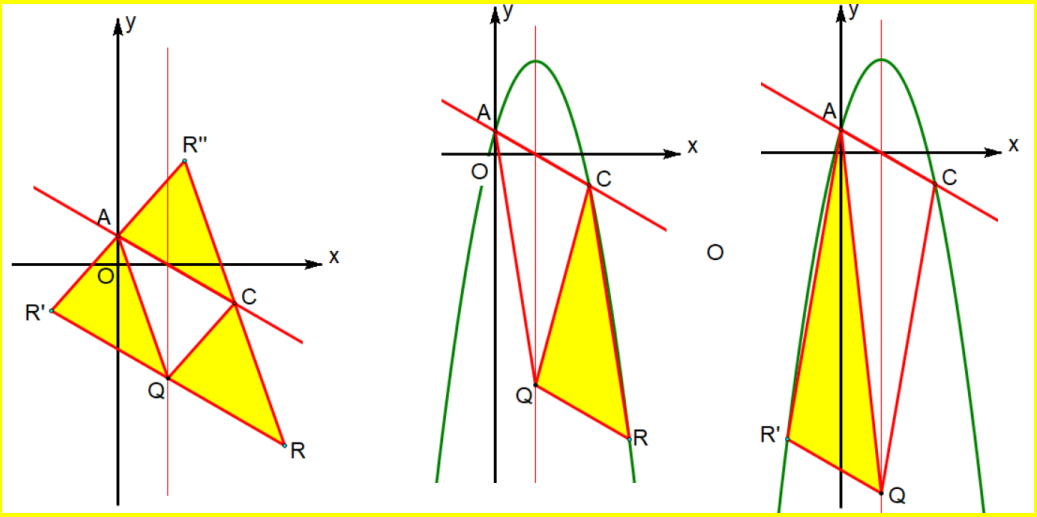


图 4　　图 5　　图 6

考点伸展

第（2）题中，△*PAB* 的面积最大，取决于△*PAC* 的面积最大，因为 *AB*∶*AC* 是确定的. 当点 *P* 在线段 *AC* 的中点的正上方时，△*PAC* 的面积最大，此时△*PAB* 的面积也最大. 这是一个教科书式的结论.