例　　2020 年黄冈市中考第 24 题

如图 1，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$，点 $B(3, 0)$，与 y 轴交于点 $C(0, 3)$，顶点为 D.

（1）求抛物线的解析式；

（2）若过点 C 的直线交线段 AB 于点 E，且 $S_{\triangle ACE}:S_{\triangle CEB}=3:5$，求直线 CE 的解析式；

（3）若点 P 在抛物线上，点 Q 在 x 轴上，当以点 D、C、P、Q 为顶点的四边形是平行四边形时，求点 P 的坐标；

（4）已知点 $H(0, \frac{45}{8})$，$G(2, 0)$，在抛物线对称轴上找一点 F，使 $HF+AF$ 的值最小．此时，在抛物线上是否存在一点 K，使 $KF+KG$ 的值最小，若存在，求出点 K 的坐标；若不存在，请说明理由．

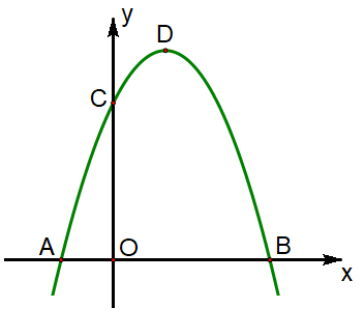


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“20 黄冈 24”，拖动点 Q 在 x 轴上运动，可以体验到，点 P_1、P_2 各有两次机会落在抛物线上，点 P_3 没有机会落在抛物线上．点击屏幕左下方的按钮“第（3）题”，可以体验到，当 M、N 两点重合时，$KN+KG$ 取得最小值．

思路点拨

1．第（3）题可以通过在 x 轴上虚拟一个点 Q，找到三个点 P 的位置，再通过点的平移进行求解．

2．第（4）题的关键在于将 K、F 两点间的距离转化为点 K 到定直线的距离，再利用三角形的三边关系及垂线段最短进行求解．

满分解答

（1）设抛物线的交点式 $y=a(x+1)(x-3)$.

将 $C(0, 3)$代入，得 $-3a=3$．解得 $a=-1$.

抛物线的解析式为 $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$.

（2）如图 2，$\triangle ACE$ 和$\triangle CEB$ 是同高三角形，所以 $\frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle CEB}}=\frac{AE}{EB}=\frac{3}{5}$.

所以 $AE=\frac{3}{8}AB=\frac{3}{8}\times 4=\frac{3}{2}$．所以 $OE=AE-AO=\frac{1}{2}$，$E(\frac{1}{2}, 0)$.

由 $C(0, 3)$、$E(\frac{1}{2}, 0)$，得直线 CE 的解析式为 y＝－6x＋3.

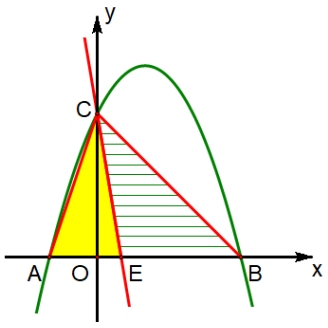


图 2

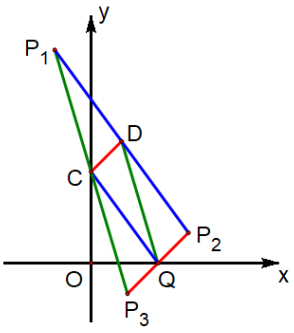


图 3

（3）由 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，得 $D(1, 4)$.

已知 $C(0, 3)$，所以 C、D 两点间的水平距离和竖直距离都是 1.

如图 3，在 x 轴上虚拟一个点 $Q(m, 0)$．过△CDQ 的每一个顶点分别作对边的平行线，三条直线两两相交得到三个点 P.

①以 $C\to D$ 的方向平移点 Q，得 $P(m+1,1)$.

将 $P(m+1,1)$代入 $y=-x^2+2x+3$，得 $-(m+1)^2+2(m+1)+3=1$.

解得 $m_1=\sqrt{3}$，$m_2=-\sqrt{3}$．所以 $P(\sqrt{3}+1, 1)$，或$(-\sqrt{3}+1, 1)$（如图 4、图 5 所示）.

②以 $D\to C$ 的方向平移点 Q，得 $P(m-1,-1)$.

将 $P(m-1,-1)$代入 $y=-x^2+2x+3$，得 $-(m-1)^2+2(m-1)+3=1$.

解得 $m_1=\sqrt{5}+2$，$m_2=-\sqrt{5}+2$．所以 $P(\sqrt{5}+1，-1)$，或$(-\sqrt{5}+1，-1)$（如图 6、图 7 所示）.

③以 $Q\to D$ 的方向平移点 C，得 $P(1-m, 7)$.

将 $P(1-m, 7)$代入 $y=-x^2+2x+3$，得 $-(1-m)^2+2(1-m)+3=7$.

整理，得 $m^2+3=0$，方程无解．所以这种情况不存在.

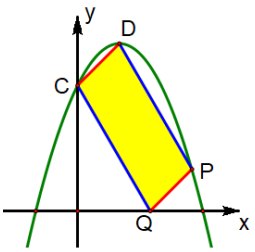


图 4

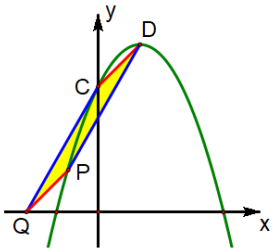


图 5

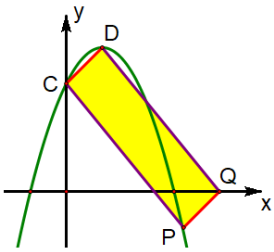


图 6

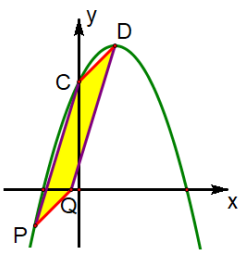


图 7

（4）第一步，求点 F 的坐标.

如图 8，因为点 B 与点 A 关于对称轴 $x=1$ 对称，连结 BH，BH 与对称轴 $x=1$ 的交点就是点 F．设直线 $x=1$ 与 x 轴的交点为点 P.

因为 $FP//HO$，所以 $\frac{FP}{HO}=\frac{BP}{BO}=\frac{2}{3}$．所以 $FP=\frac{2}{3}HO=\frac{2}{3}\times\frac{45}{8}=\frac{15}{4}$．所以 $F(1,\frac{15}{4})$.

第二步，设 $K(m, n)$，用 n 表示 KF 的长.

已知 $F(1,\frac{15}{4})$，设 $K(m, n)$，$n=-(m-1)^2+4$．所以$(m-1)^2=4-n$.

所以 $KF^2=(m-1)^2+(n-\frac{15}{4})^2=(4-n)+(n-\frac{15}{4})^2=n^2-\frac{17}{2}n+\frac{15^2+8^2}{16}=(n-\frac{17}{4})^2$.

所以 $KF=\frac{17}{4}-n$．几何意义就是 KF 等于点 K 到直线 $y=\frac{17}{4}$ 的距离.

设直线 $y=\frac{17}{4}$ 为 l，作 $KN\perp l$ 于 N，那么 $KF=KN$．也就是说，抛物线上任意一点 K 到定点 F 的距离，等于这点到定直线 l 的距离.

第三步，求 $KF+KG$ 取得最小值时点 K 的坐标.

如图 9，作 $GM\perp l$ 于 M，$KN\perp l$ 于 N，连结 GN.

那么 $KF+KG=KN+KG>GN>GM$.

所以当 M、N 两点重合时，$KF+KG$ 取得最小值，最小值为 $\frac{17}{4}$.

此时 $x_K=x_G=2$，$K(2, 3)$.

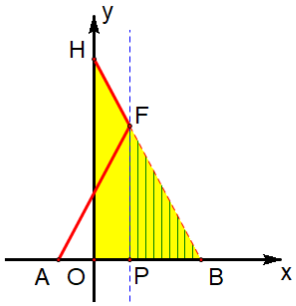


图 8

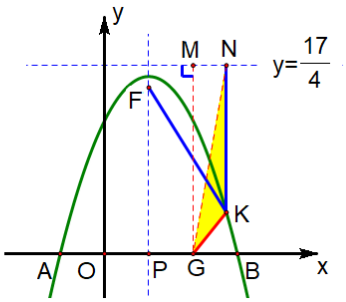


图 9

考点伸展

这道压轴题涉及到三个存在性问题，即面积的存在性问题，平行四边形的存在性问题和最值问题，三个存在性问题叠加在同一个题目里很有难度.

更有难度的是两个经典的最值问题又叠加在第（4）题中，一个是大家熟悉的“牛喝水”问题，也有很多网友称为“将军饮马”问题.

另一个经典的最值问题还有一个先决的隐含条件，就是抛物线上任意一点到定点的距离等于这点到定直线的距离，定点是点 F，首先要探究出这条定直线.

然后再根据“两点之间线段最短”和“垂线段最短”确定最小距离.

黄冈市以前也考过抛物线的这个性质，属于高中数学要学习的内容. 很巧的是，深圳市今年的压轴题也考到了这个性质，定直线也是相同的.