例　　2020 年菏泽市中考第 24 题

如图 1，抛物线 $y=ax^2+bx-6$ 与 x 轴相交于 A、B 两点，与 y 轴相交于点 C，$OA=2$，$OB=4$，直线 l 是抛物线的对称轴，在直线 l 右侧的抛物线上有一动点 D，连结 AD、BD、BC、CD.

（1）求抛物线的函数表达式；

（2）若点 D 在 x 轴的下方，当△BCD 的面积是 $\frac{9}{2}$ 时，求△ABD 的面积；

（3）在（2）的条件下，点 M 是 x 轴上一点，点 N 是抛物线上一点，是否存在点 N，使得以点 B、D、M、N 为顶点，以 BD 为一边的四边形是平行四边形，若存在，求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由.

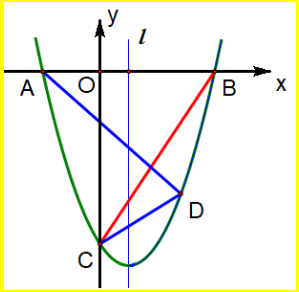


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“20 菏泽 24”，拖动点 M 在 x 轴上运动，可以体验到，点 N 和点 D 到 x 轴的距离相等.

思路点拨

1．△BCD 的面积可以通过割补法进行求解.

2．第（3）题先在 x 轴上虚拟一个点 M，过△BDM 的每一个顶点作对边的平行线，三条直线两两相交得到三个点 N.

满分解答

（1）因为抛物线与 x 轴交于 $A(-2, 0)$、$B(4, 0)$，设 $y=a(x+2)(x-4)$.

根据常数项相等，得 $-8a=-6$．解得 $a=\frac{3}{4}$.

所以抛物线的函数表达式为 $y=\frac{3}{4}(x+2)(x-4)=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x-6$.

（2）如图 2，连结 OD．设 $D(x, y)$，$y=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x-6$.

所以 $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle DCO}+S_{\triangle DBO}-S_{\triangle CBO}=3x-2y-12=\frac{9}{2}$.

所以 $3x-2(\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x-6)-12=\frac{9}{2}$．整理，得 $x^2-4x+3=0$.

解得 $x_1=3$，$x_2=1$（点 D 在对称轴上，舍去）．所以 $D(3,-\frac{15}{4})$.

此时 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot(-y)=\frac{1}{2}\times6\times\frac{15}{4}=\frac{45}{4}$.

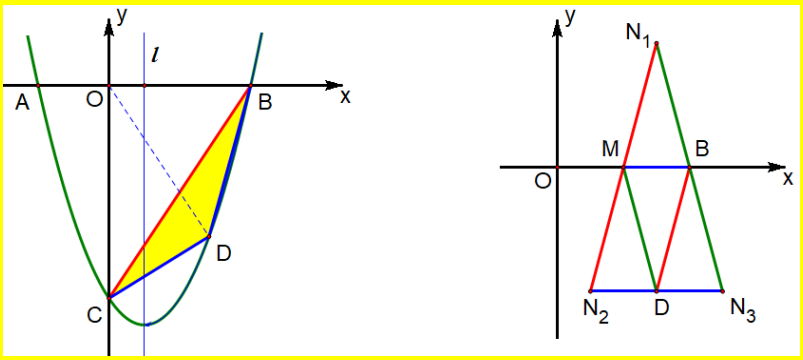


图 2

图 3

（3）已知 $B(4,0)$、$D(3,-\frac{15}{4})$，那么 B、D 两点间的水平距离为 1，竖直距离为 $\frac{15}{4}$.

如图 3，在 x 轴上虚拟一个点 $M(m,0)$，过△BDM 的每一个顶点作对边的平行线，三条直线两两相交得到三个点 N.

如果以 BD 为平行四边形的边，那么 N_1、N_2 满足条件.

①按照 $D\to B$ 的方向，平移点 $M(m,0)$，得 $N(m+1,\frac{15}{4})$.

将 $N(m+1,\frac{15}{4})$代入 $y=\frac{3}{4}(x+2)(x-4)$，得 $\frac{3}{4}(m+3)(m-3)=\frac{15}{4}$.

解得 $m_1=\sqrt{14}$，$m_2=-\sqrt{14}$. 所以 $N(\sqrt{14}+1,\frac{15}{4})$或$(-\sqrt{14}+1,\frac{15}{4})$（如图 4 所示）.

②按照 $B\to D$ 的方向，平移点 $M(m,0)$，那么 $ND//OB//x$ 轴. 所以 N、D 两点关于对称轴 $x=1$ 对称，所以 $N(-1,-\frac{15}{4})$（如图 5 所示）.

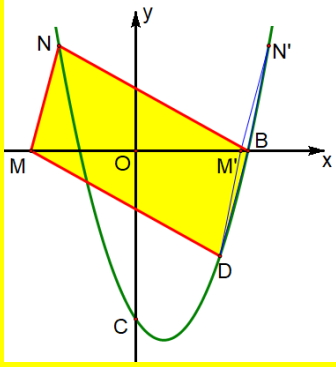


图 4

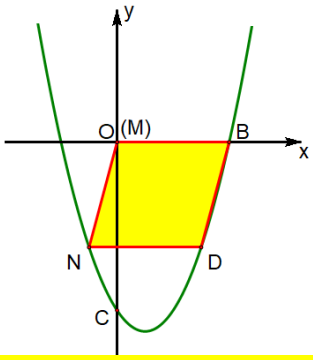


图 5

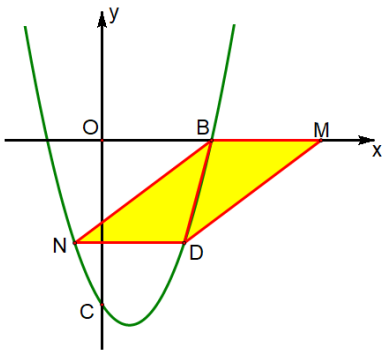


图 6

考点伸展

第（3）题中，如果 BD 为平行四边形的对角线，那么点 N_3 满足条件（如图 3）.

因为 $MB//DN$，此时点 N 也与点 D 关于抛物线的对称轴对称.（如图 6 所示）.