例　　2020 年河南省中考第 23 题

将正方形 $ABCD$ 的边 AB 绕点 A 逆时针旋转至 AB'，记旋转角为 α．连接 BB'，过点 D 作 DE 垂直于直线 BB'，垂足为点 E，连结 DB'，CE．

（1）如图 1，当 $\alpha=60°$ 时，$\triangle DEB'$的形状为_____，连结 BD，可求出 $\dfrac{BB'}{CE}$ 的值为_____；

（2）当 $0°<\alpha<360°$ 且$\alpha\neq90°$ 时，

①（1）中的两个结论是否依然成立？如果成立，请仅就图 2 的情形进行证明；如果不成立，请说明理由；

②当以点 B'、E、C、D 为顶点的四边形是平行四边形时，请直接写出 $\dfrac{BE}{B'E}$ 的值．

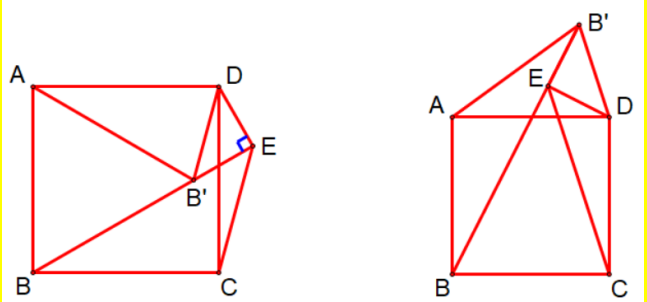


图 1　　图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“20 河南 23”，拖动点 B'绕点 A 旋转，可以体验到，C、E 两点在以 BD 为直径的圆上，$\triangle BDB'$与$\triangle CDE$ 保持相似，$\triangle DEB'$保持等腰直角三角形的形状．还可以体验到，当 BE 经过 CD 的中点，或 $B'C$ 经过 AD 的中点时，以点 B'、E、C、D 为顶点的四边形是平行四边形．

思路点拨

1．把等腰三角形 ABB'和等腰三角形 ADB'的底角用α 表示出来，就会发现 Rt$\triangle DEB'$的特殊性．

2．C、E 两点在以 BD 为直径的圆上，把同弧所对的圆周角都标记出来．

3．点 B'的位置存在两种情况，在线段 BE 上或 BE 的延长线上．

满分解答

（1）如图 3，当 $\alpha=60°$ 时，$\triangle DEB'$是等腰直角三角形，$\dfrac{BB'}{CE}=\sqrt{2}$．

（2）①（1）中的两个结论依然成立．

如图 4，在等腰三角形 ABB'中，顶角为 α，所以底角 $\angle AB'B=\dfrac{180°-\alpha}{2}$．

在等腰三角形 ADB'中，顶角为 $\alpha-90°$，所以底角 $\angle AB'D=\dfrac{180°-(\alpha-90°)}{2}$．

所以 $\angle BB'D=\dfrac{180°-(\alpha-90°)}{2}-\dfrac{180°-\alpha}{2}=45°$．所以 Rt$\triangle DEB'$是等腰直角三角形．

如图 5，因为 $\angle BCD=\angle BED=90°$，所以 C、E 两点都在以 BD 为直径的圆上．

根据同弧所对的圆周角相等，得∠EBD＝∠ECD，∠CED＝∠CBD＝45°．

等量代换，得∠CED＝∠$BB'D$＝45°．

所以△$BB'D$∽△CED．所以 $\frac{BB'}{CE}=\frac{BD}{CD}=\sqrt{2}$．

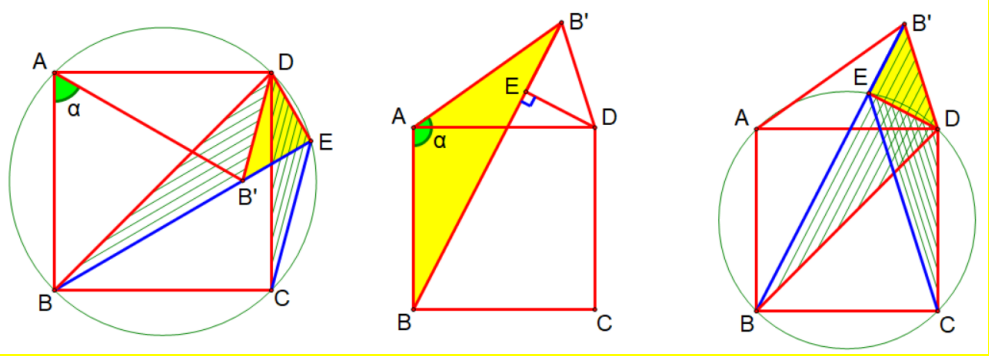


图 3　　图 4　　图 5

② $\frac{BE}{B'E}$ 的值等于 3 或 1．

考点伸展

第（2）②分两种情况．

情形一，如图 6，当点 B'在 BE 上时．由 $\frac{BB'}{CE}=\sqrt{2}$，设 BB'＝$2m$，CE＝$\sqrt{2}m$．

因为 CE 与 $B'D$ 平行且相等，所以 $B'D$＝$\sqrt{2}m$．

在等腰直角三角形 DEB'中，斜边 $B'D$＝$\sqrt{2}m$，所以 $B'E$＝DE＝m．

于是得到 $\frac{BE}{B'E}=\frac{2m+m}{m}=3$．

情形二，如图 7，当点 B'在 BE 的延长线上上时．同样的，设 BB'＝$2m$，CE＝$\sqrt{2}m$．

同样的，在等腰直角三角形 DEB'中，斜边 $B'D$＝$\sqrt{2}m$，所以 $B'E$＝DE＝m．

此时 $\frac{BE}{B'E}=\frac{2m-m}{m}=1$．

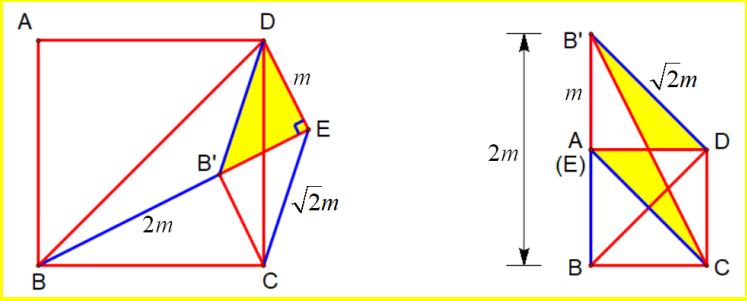


图 6　　图 7