例　　2020 年常德市中考第 25 题

如图 1，已知抛物线 $y=ax^2$ 过点 $A(-3,\frac{9}{4})$.

（1）求抛物线的解析式；

（2）已知直线 l 过点 A、$M(\frac{3}{2},0)$ 且与抛物线交于另一点 B，与 y 轴交于点 C.

求证：$MC^2=MA\cdot MB$；

（3）若点 P、D 分别是抛物线与直线 l 上的动点，以 OC 为一边且顶点为 O、C、P、D 的四边形是平行四边形，求所有符合条件的点 P 的坐标.

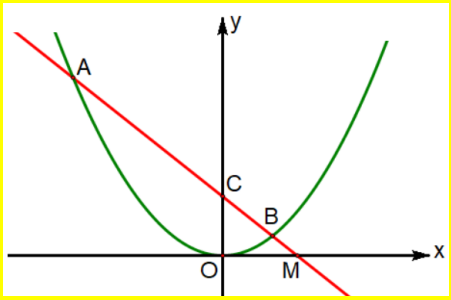


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“20 常德 25”，拖动点 D 在直线上运动，可以体验到，点 P 有两个时刻可以落在抛物线上，点 P' 有一个时刻可以落在抛物线上.

思路点拨

1．第（2）题要证等积式，可以转化为证明等比式．证明两个比值相等.

2．第（3）题按照 P、D 的位置关系，分两种情况列方程.

满分解答

（1）将点 $A(-3,\frac{9}{4})$ 代入 $y=ax^2$，得 $\frac{9}{4}=9a$．解得 $a=\frac{1}{4}$.

所以抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{4}x^2$.

（2）如图 2，由 $A(-3,\frac{9}{4})$、$M(\frac{3}{2},0)$，得直线 l 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$.

联立 $y=\frac{1}{4}x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$，消去 y，整理，得 $x^2+2x-3=0$.

解得 $x=1$，或 $x=-3$（就是点 A）．所以 $B(1,\frac{1}{4})$.

作 $AA'\perp x$ 轴于 A'，作 $BB'\perp x$ 轴于 B'.

所以 $\frac{MC}{MA}=\frac{MO}{MA'}=\frac{3}{2}\div(\frac{3}{2}+3)=\frac{1}{3}$，

$\frac{MB}{MC}=\frac{MB'}{MO}=(\frac{3}{2}-1)\div\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$.

所以 $\frac{MC}{MA}=\frac{MB}{MC}$．所以 $MC^2=MA\cdot MB$.

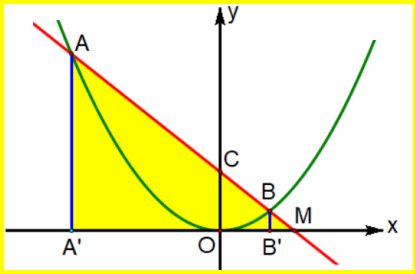


图 2

（3）设 $P(x,\frac{1}{4}x^2)$，$D(x,-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4})$．由 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$，得 $CO=\frac{3}{4}$．

由 $PD//CO$，$PD=CO=\frac{3}{4}$，分两种情况讨论（如图 3 所示）：

①当点 P 在点 D 上方时，$\frac{1}{4}x^2-(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4})=\frac{3}{4}$．

整理，得 $x^2+2x-6=0$．解得 $x=-1\pm\sqrt{7}$．

当 $x=-1-\sqrt{7}$ 时，$y=\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}(-1-\sqrt{7})^2=2+\frac{1}{2}\sqrt{7}$（如图 3 中的点 P）．

当 $x=-1+\sqrt{7}$ 时，$y=\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{7})^2=2-\frac{1}{2}\sqrt{7}$（如图 3 中的点 P'）．

所以 $P(-1-\sqrt{7},2+\frac{1}{2}\sqrt{7})$，或 $(-1+\sqrt{7},2-\frac{1}{2}\sqrt{7})$．

②当点 P 在点 D 下方时，$(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4})-\frac{1}{4}x^2=\frac{3}{4}$．整理，得 $x^2+2x=0$．

解得 $x=-2$，或 $x=0$（点 P、O 重合，舍去）．此时 $P(-2,1)$（如图 3 中的点 P''）．

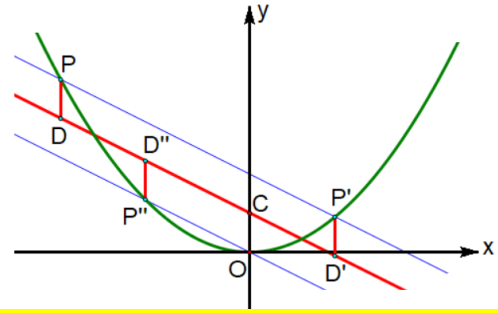


图 3

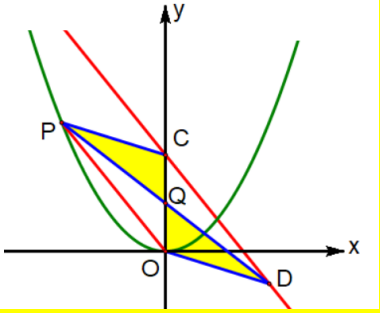


图 4

考点伸展

在第（3）题的条件下，如果 OC 是平行四边形的对角线，那么怎样求点 P 的坐标呢？

如图 4，因为 P、D 关于 OC 的中点 $(0,\frac{3}{8})$ 中心对称，可设 $P(m,\frac{3}{8}+n)$，$D(-m,\frac{3}{8}-n)$．

将点 P、Q 分别代入 $y=\frac{1}{4}x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$，得 $\begin{cases}\frac{3}{8}+n=\frac{1}{4}m^2,\\ \frac{3}{8}-n=\frac{1}{2}m+\frac{3}{4}.\end{cases}$

消去 n，整理，得 $m^2+2m=0$．

解得 $m=-2$，或 $m=0$（点 P、O 重合，舍去）．

此时 $P(-2,1)$，$Q(2,-\frac{1}{4})$．此示意图中的横、纵坐标单位长度的比不是 1∶1．