例　　2020 年襄阳市中考第 25 题

如图 1，直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 交 y 轴于点 A，交 x 轴于点 C，抛物线 $y=-\frac{1}{4}x^2+bx+c$ 经过点 A、C，且交 x 轴于另一点 B.

（1）直接写出点 A、B、C 的坐标及抛物线的解析式；

（2）在直线 AC 上方的抛物线上有一点 M，求四边形 $ABCM$ 面积的最大值及此时点 M 的坐标；

（3）将线段 OA 绕 x 轴上的动点 $P(m, 0)$顺时针旋转 90° 得到线段 $O'A'$，若线段 $O'A'$ 与抛物线只有一个公共点，请结合函数图像，求 m 的取值范围.

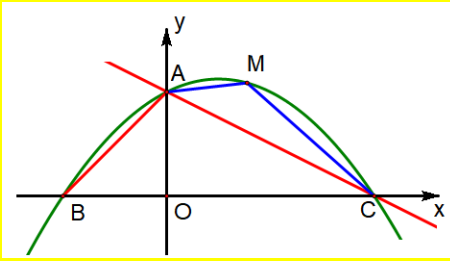
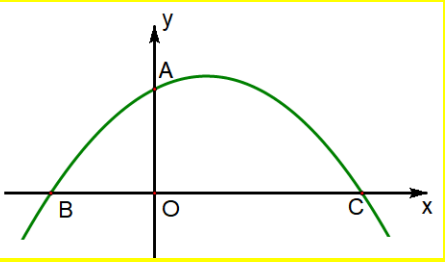


图 1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“20 襄阳 25”，拖动点 P 在 x 轴上运动，可以体验到，点 O'和点 A'各有两次机会落在抛物线上.

思路点拨

1．四边形 $ABCM$ 的面积可以割补为△ABO、△MAO、△MCO 三个三角形面积之和.

2．第（3）题先求临界值，点 A'与点 O'分别落在抛物线上时 m 的值，再结合图像写出 m 的范围.

满分解答

（1）由 $y=-\frac{1}{2}x+2$，得 $A(0, 2)$、$C(4, 0)$.

设抛物线的交点式为 $y=-\frac{1}{4}(x-4)(x-x_2)$.

代入 $A(0, 2)$，得 $-x_2=2$．解得 $x_2=-2$．所以 $B(-2, 0)$.

所以 $y=-\frac{1}{4}(x-4)(x+2)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2$.

（2）如图 2，连结 OM. 设 $M(x, y)$，$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2$.

所以 $S_{四边形ABCM}=S_{△ABO}+S_{△MAO}+S_{△MCO}$

$=2+x+2y$.

$=2+x+2(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2)$

$=-\frac{1}{2}x^2+2x+6=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8$.

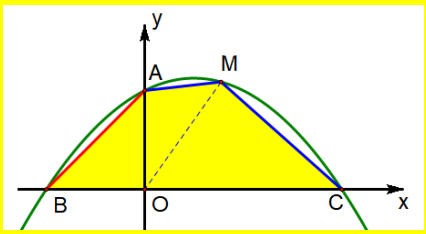


图 2

当 $x=2$ 时，四边形 $ABCM$ 的面积最大，最大值为 8，此时 $M(2, 4)$.

（3）由 $P(m, 0)$，得 $O'(m, m)$，$A'(m+2, m)$．先求临界位置时 m 的值．

①点 A'落在抛物线上．将 $A'(m+2, m)$代入 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2$，

得 $-\frac{1}{4}(m+2)^2+\frac{1}{2}(m+2)+2=m$．整理，得 $m^2+6m-8=0$．

解得 $m_1=-3+\sqrt{17}$（如图 3 所示），$m_2=-3-\sqrt{17}$（如图 5 所示）．

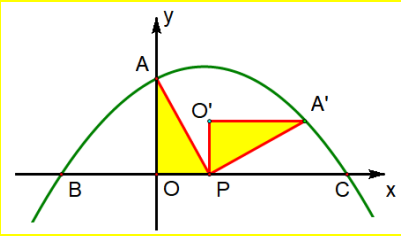


图 3

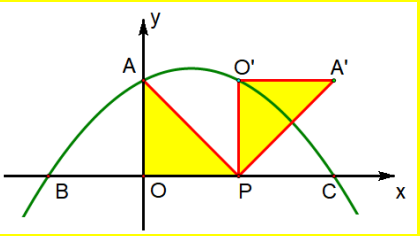


图 4

②点 O'落在抛物线上．将 $O'(m, m)$代入 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2$，得 $-\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{2}m+2=m$．

整理，得 $m^2+2m-8=0$．解得 $m_1=2$（如图 4 所示），$m_2=-4$（如图 6 所示）．

根据临界值，结合图像，可知，当点 P 在 x 轴正半轴上时，$-3+\sqrt{17}\leqslant m\leqslant 2$．当点 P 在 x 轴负半轴时，$-3-\sqrt{17}\leqslant m\leqslant -4$．

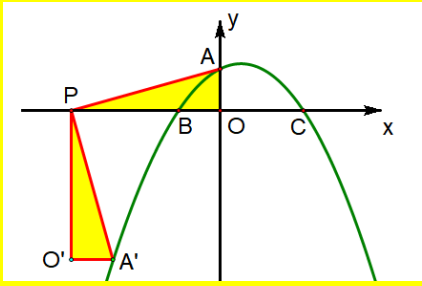


图 5

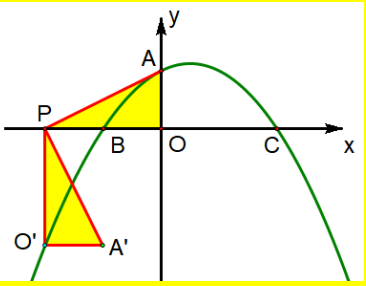


图 6

考点伸展

大家可以思考一下：点 O'和点 A'的轨迹是怎样的呢？

由 $O'(m, m)$，得点 O'的横纵坐标始终相等，所以点 O'的轨迹是直线 $y=x$．

由 $A'(m+2, m)$，得点 A'的横坐标与纵坐标的差值为 2，所以点 A'的轨迹是直线 $y=x-2$．

点 O'和点 A'的轨迹是两条互相平行的直线（如图 7 所示）．

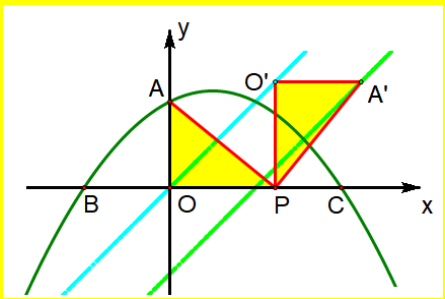


图 7