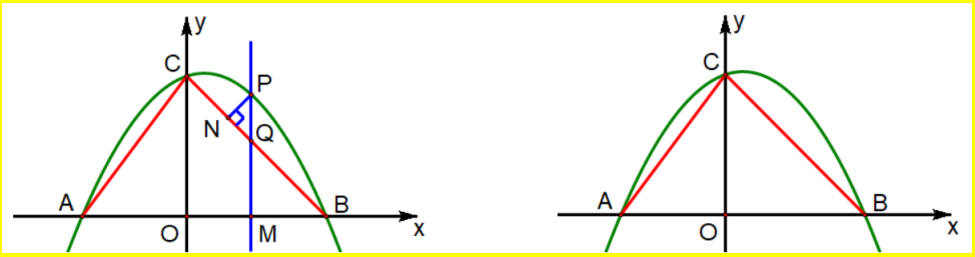
⑩（20 枣庄 25）如图，抛物线 $y=ax^2+bx+4$ 交 x 轴于 $A(-3, 0)$，$B(4, 0)$两点，与 y 轴交于点 C，连结 AC、BC．M 为线段 OB 上的一个动点，过点 M 作 $PM\perp x$ 轴，交抛物线于点 P，交 BC 于点 Q．

（1）求抛物线的表达式；

（2）过点 P 作 $PN\perp BC$，垂足为点 N．设 M 点的坐标为$(m, 0)$，请用含 m 的代数式表示线段 PN 的长，并求出当 m 为何值时 PN 有最大值，最大值是多少？

（3）试探究点 M 在运动过程中，是否存在这样的点 Q，使得以 A、C、Q 为顶点的三角形是等腰三角形．若存在，请求出此时点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由．



备用图

⓾（1）设抛物线的表达式为 $y=a(x+3)(x-4)$.

根据常数项相等，得 $-12a=4$．解得 $a=-\frac{1}{3}$.

所以抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{3}(x+3)(x-4)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+4$.

（2）如图 1，因为 $OB=OC=4$，所以△COB 是等腰直角三角形.

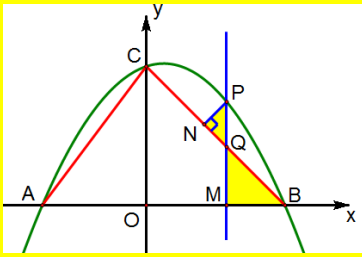
因为△QNP∽△QMB∽△COB，所以△QMB 与△QNP 也是等腰直角三角形.

由 $M(m, 0)$，得 $P(m,-\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{3}m+4)$，$Q(m,4-m)$.

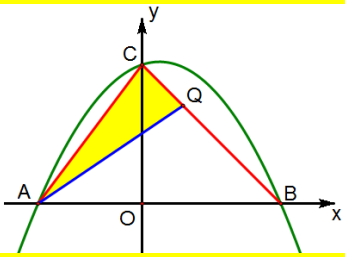
所以 $PQ=(-\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{3}m+4)-(4-m)=-\frac{1}{3}m^2+\frac{4}{3}m=-\frac{1}{3}(m-2)^2+\frac{4}{3}$.

所以 $PN=\frac{\sqrt{2}}{2}PQ=-\frac{\sqrt{2}}{6}(m-2)^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

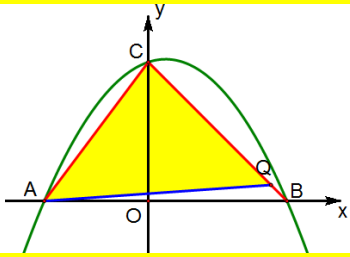
所以当 $m=2$ 时，PN 取得最大值，最大值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



第 10 题图 1



第 10 题图 2



第 10 题图 3

（3）已知 $A(-3, 0)$、$C(0, 4)$，设 $Q(m,4-m)$.

所以 $AC^2=25$，$AQ^2=(m+3)^2+(4-m)^2$，$CQ^2=m^2+(-m)^2$.

分三种情况讨论等腰三角形 ACQ.

①当 $AC=AQ$ 时，根据 $AC^2=AQ^2$，列方程 $25=(m-3)^2+(4-m)^2$.

整理，得 $m^2-m=0$．解得 $m_1=0$（舍去），$m_2=1$．所以 $Q(1, 3)$（如图 2 所示）.

②当 $CA=CQ$ 时，根据 $CA^2=CQ^2$，列方程 $25=m^2+(-m)^2$.

整理，得 $2m^2-25=0$．解得 $m_1=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$（舍去），$m_2=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

所以 $Q(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 4-\frac{5\sqrt{2}}{2})$（如图 3 所示）.

③当 $QA=QC$ 时，根据 $QA^2=QC^2$，列方程 $(m+3)^2+(4-m)^2=m^2+(-m)^2$.

整理，得 $2m-25=0$．解得 $m=\frac{25}{2}$（点 M 在 OB 的延长线上，舍去）.